ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2018. Вип. 26. С. 29–39
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 26. P. 29–39

М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

УДК 519.6

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ СТАНУ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ОБОЛОНОК, ПОРОДЖЕНОГО ТЕРМОСИЛОВИМИ НАВАНТАЖЕННЯМИ

І. Бернакевич[1], П. Вагін[1], І. Козій[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: petro.vahin@lnu.edu.ua
[2]Політехніка Опольська, Ополе, Польща, e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Сформульовано нелінійну початково-крайову задачу для оболонок, податливих до зсувів і стиснення. Записано ключові рівняння для визначення нестаціонарного термопружного стану розглядуваної математичної моделі оболонок. Чисельно розв’язано задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглянуто випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально-круговим законом. Зроблено порівняльний аналіз отриманих чисельних розв’язків у лінійнійному та геометрично нелінійному формулюванні.

Ключові слова: оболонка, термопружність, метод скінченних елементів, геометрична нелінійність.

1. ВСТУП

Багато конструкцій сучасного машинобудування містять оболонки як складові елементи. Врахування геометрично-нелінійних складових допомагає точніше дослідити вплив термосилових навантажень. Тому дослідження нестаціонарного пружно-деформівного стану оболонок, які перебувають під дією термосилових навантажень у геометрично-нелінійному формулюванні, має важливе значення для прикладних застосувань.

У працях [2, 3] побудовано початково-крайові та відповідні варіаційні задачі динаміки та статики оболонок під дією термосилових навантажень у геометрично лінійному формулюванні. Головна особливість використаного в цих працях підходу полягає в напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка-Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Результуючі співвідношення моделі містять невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень, а саме: зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі. Сукупність результатів праць [2,3] слугує ґрунтовною основою для продовження дослідження цього класу моделей оболонок, а саме в геометрично нелінійному формулюванні. Ми намагалися спробувати врахувати ефекти впливу нерівномірного змінного в часі температурного поля в згаданій моделі оболонок.

2. ГЕОМЕТРІЯ ТА ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ І СТИСНЕННЯ

Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала порівняно з іншими розмірами тіла. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3|\le h/2$, де h – товщина оболонки. Вважаємо, що координатні лінії α_1, α_2 збігаються з лініями головних кривин. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω. Тоді точки оболонки визначатимуться множиною

$$V=\Omega\times\left]-h/2,h/2\right[$$

з неперервною за Ліпшицем межею, яка складається з лицьових поверхонь

$$\Omega_{\pm}=\Omega\times\{\pm h/2\}$$

і бічної поверхні

$$\Sigma=\Gamma\times\left]-h/2,h/2\right[.$$

Уведена параметризація оболонки дає підстави стверджувати, що елемент об'єму оболонки dV та поверхні $d\Omega$ визначаються як

$$dV=H_1H_2H_3d\alpha d\alpha_3,\ d\Omega=H_1H_2d\alpha.$$

Тут H_i, ($i=1,2,3$) – параметри Ляме, причому

$$H_i(\alpha,\alpha_3)=A_i(1+\alpha_3k_i),\ i=1,2,$$

$$H_3(\alpha,\alpha_3)=1,$$

де $A_i=A_i(\alpha)$ і $k_i=k_i(\alpha)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω, відповідно.

Нехай компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, залежать від координат α_i ($i=1,2,3$) і від часу t, тоді зумовлені ними переміщення $\boldsymbol{U}=\{U_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)\}_{i=1}^{3}$, деформації та напруження теж є функціями часу. З огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами оболонки товщину h, розгорнемо вектор зміщень точок оболонки за формулою Маклорена в околі серединної поверхні зі збереженням лінійних членів. Тоді

$$U_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=u_i(\alpha,t)+\alpha_3\gamma_i(\alpha,t)+O(h^2),\ i=1,2,3.$$

Тут $u_i(\alpha,t)=U_i(\alpha_1,\alpha_2,0,t)$ описують зміщення точок серединної поверхні Ω в часі, а $\gamma_i(\alpha,t)=\partial_3U_i(\alpha_1,\alpha_2,0,t)$ визначають кут повороту нормалі незалежно від u_i. Тут і надалі прийнято позначення $\partial_i=\partial/\partial\alpha_i$. Отже, для нестаціонарного аналізу термопружного стану оболонок, податливих до зсувів та стиснення, потрібно записати систему з шести рівнянь динамічної рівноваги для визначення вектора узагальнених зміщень серединної поверхні $\boldsymbol{u}(t)=(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T$ та доповнити її відповідними крайовими умовами на межі серединної поверхні Γ.

Деформаційні співвідношення теорії малих деформацій і поворотів, що пов'язують компоненти тензора Гріна ε_{ij} з компонентами тензора лінійної деформації $\boldsymbol{E}_{ij}$ та поворотів $\boldsymbol{\omega}_i$ набувають вигляду [6]

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \boldsymbol{E}_{11} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_3^2 \quad 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3,\\
&\varepsilon_{12} = \boldsymbol{E}_{12} - \boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2,\\
&\varepsilon_{13} = \boldsymbol{E}_{13} - \boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_3,\\
&\varepsilon_{23} = \boldsymbol{E}_{23} - \boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Деформаційні співвідношення, які пов'язують компоненти тензора лінійної деформації $\boldsymbol{E}_{ij}$ та тензора поворотів $\boldsymbol{\omega}_i$ з переміщеннями, подамо для зручності у матричному вигляді

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{C}_\Omega \boldsymbol{u}, \tag{3}$$

де через $\boldsymbol{e} = \left(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\right)^T$ позначено вектор компонент тензора лінійної деформації $\boldsymbol{E}_{ij}$, який складається з тангенціальних $e_{ij}\left(\boldsymbol{u}\right)$ і згинних $\kappa_{ij}\left(\boldsymbol{u}\right)$ складових, $\boldsymbol{\omega} = \left(\overset{0}{\omega}_1, \overset{0}{\omega}_2, \overset{0}{\omega}_3, \overset{1}{\omega}_1, \overset{1}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3\right)^T$ – вектор компонент тензора поворотів $\boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{C}_l$, – матриця диференціальних операторів наведена в [2], а $\boldsymbol{C}_\Omega$ має вигляд

$$\boldsymbol{C}_\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
0 & -k_2 & \dfrac{\partial_2}{A_2} & 0 & -1 & 0\\
k_1 & 0 & -\dfrac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0\\
-\dfrac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \dfrac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & \dfrac{\partial_2}{A_2}\\
0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & -\dfrac{\partial_1}{A_1}\\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \dfrac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0
\end{pmatrix}.$$

Якщо ввести $\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23}\right)^T$ – вектор компонент тензора деформацій Гріна ε_{ij}, де $\varepsilon_{ij}\left(\boldsymbol{u}\right)$ і $\chi_{ij}\left(\boldsymbol{u}\right)$ – тангенціальні та згинні складові, відповідно, то співвідношення (1) для тонких оболонок податливих до зсувів і стиснення з точністю до $o\left(h\right)$ набудуть вигляду

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_3\right)^2, \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_3\right)^2, \varepsilon_{33} = e_{33},$$

$$\chi_{11} = \kappa_{11} + \overset{0}{\omega}_2\overset{1}{\omega}_2 + \overset{0}{\omega}_3\overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_1\left(\overset{0}{\omega}_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(k_1 + 2k_2\right)\left(\overset{0}{\omega}_3\right)^2,$$

$$
\begin{aligned}
&\chi_{22} = \kappa_{22} + \overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_1 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2} k_2 \left(\overset{0}{\omega}_1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(k_1 + 2k_2\right)\left(\overset{0}{\omega}_3\right)^2, \\
&\varepsilon_{12} = e_{11} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \quad \chi_{12} = \kappa_{12} - \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_2 + \overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2\right), \\
&\varepsilon_{13} = e_{13} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3, \quad \chi_{13} = \kappa_{13} - \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_3 + \overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3\right) + k_2 \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3, \\
&\varepsilon_{23} = e_{23} - \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3, \quad \chi_{23} = \kappa_{23} - \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_3 + \overset{1}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3\right) + k_1 \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Деформаційні співвідношення (4) з урахуванням (2), (3) запишемо в матричній формі

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{11}^T \boldsymbol{E}_\Omega \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_\Omega \boldsymbol{u}\right)_{11}^T \boldsymbol{E}_\Omega \left(\boldsymbol{C}_\Omega \boldsymbol{u}\right). \tag{5}
$$

Тут $\boldsymbol{\omega}_{11}^T$ – блочно-діагональна матриця, яка містить 11 ненульових діагональних блоків $\boldsymbol{\omega}^T$. Матрицю $\boldsymbol{E}_\Omega$, яка входить в (5), подамо у вигляді $\boldsymbol{E}_\Omega = \left(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_{11}\right)^T$, де $\boldsymbol{E}_i$ – матриці розмірності 6×6, відмінні від нуля, компоненти яких, відповідно, дорівнюють

$$
\begin{gathered}
E_1^{22} = E_1^{33} = 1, \qquad E_2^{11} = E_2^{33} = 1, \\
E_4^{21} = E_4^{12} = -1/2,\ E_5^{31} = E_5^{13} = -1/2,\ E_6^{32} = E_6^{23} = -1/2, \\
E_7^{22} = -k_1,\ E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1,\ E_7^{33} = -\left(k_1 + 2k_2\right), \\
E_8^{11} = -k_2,\ E_8^{41} = E_8^{14} = E_8^{36} = E_8^{63} = 1,\ E_8^{33} = -\left(2k_1 + k_2\right), \\
E_9^{51} = E_9^{42} = E_9^{24} = E_9^{15} = -1/2, \\
E_{10}^{31} = E_{10}^{13} = k_2,\ E_{10}^{61} = E_{10}^{43} = E_{10}^{16} = E_{10}^{34} = -1/2, \\
E_{11}^{32} = E_{11}^{23} = k_1,\ E_{11}^{62} = E_{11}^{53} = E_{11}^{26} = E_{11}^{35} = -1/2.
\end{gathered}
$$

Припустимо, що оболонка піддається дії об'ємної сили $\left\{F_i\right\}_{i=1}^3$ в області V, поверхневих навантажень $\left\{\sigma_i^{\pm h/2}\right\}_{i=1}^3$, прикладених до поверхонь $\Omega_\pm$, і поверхневих напружень $\left\{\sigma_t^\Sigma, \sigma_s^\Sigma, \sigma_n^\Sigma\right\}$ ($\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$ – орти правої трійки криволінійних координат) на частині Σ_σ поверхні Σ, причому $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times \left]-h/2, h/2\right[$. На решті бічної поверхні $\Sigma_u = \Sigma \setminus \Sigma_\sigma$ задані переміщення $\boldsymbol{u}\big|_{\Sigma_u} = \left\{u_i^g\right\}_{i=1}^6$.

На відміну від математичних моделей оболонок Тимошенка-Міндліна (п'ятимодальний варіант) [7], постулювання ненульової компоненти γ_3 дає змогу моделювати пружно-деформівний стан оболонки з врахуванням апроксимації σ_{33}.

Введемо інтегральні характеристики напружень σ_{ij}

$$
\left[N_{ij}, M_{ij}\right] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\left(1 + \alpha_3 k_{3-i}\right)\left[1, \alpha_3\right] d\alpha_3, \quad N_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33}\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right) d\alpha_3,
$$

$$\left[N_{i3},M_{i3}\right]=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{i3}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right)\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3,\quad i,j=1,2\,.$$

Надалі будемо використовувати умову рівності з точністю до $O\left(h^2\right)$ крутних моментів

$$H=M_{12}=M_{21}$$

і симетричне зусилля Новожилова [6, 7]

$$S=N_{12}-k_2M_{21}=N_{21}-k_1M_{12}\,.$$

Тоді вектор внутрішніх зусиль і моментів оболонки, що породжені вектором узагальнених переміщень, можна записати

$$\boldsymbol{\sigma}=\left(N_{11},N_{22},N_{33},S,N_{13},N_{23},M_{11},M_{22},H,M_{13},M_{23}\right)^T\,. \tag{6}$$

Вважаємо, що оболонка є лінійно пружною і перебуває в нерівномірному температурному полі $\theta\left(\alpha,\alpha_3\right)$. Тоді згідно з гіпотезою Дюгамеля-Неймана, для ізотропного матеріалу оболонки компоненти внутрішніх зусиль і моментів та деформацій будуть пов'язані між собою такими залежностями [4, 8]:

$$N_{11}=D_N\left(\left(1-\nu\right)\varepsilon_{11}+\nu\left(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)-\left(1+\nu\right)\alpha_T\theta_1\right),$$
$$N_{22}=D_N\left(\left(1-\nu\right)\varepsilon_{22}+\nu\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}\right)-\left(1+\nu\right)\alpha_T\theta_1\right),$$
$$N_{33}=D_N\left(\left(1-\nu\right)\varepsilon_{33}+\nu\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)-\left(1+\nu\right)\alpha_T\theta_1\right),$$
$$S=D_N\left(1-2\nu\right)\varepsilon_{12},\ \ N_{13}=D_N\left(1-2\nu\right)\varepsilon_{13},\ \ N_{23}=D_N\left(1-2\nu\right)\varepsilon_{23},$$
$$M_{11}=D_M\left(\left(1-\nu\right)\chi_{11}+\nu\chi_{22}-\left(1+\nu\right)\alpha_T\theta_2\right),$$
$$M_{22}=D_M\left(\left(1-\nu\right)\chi_{22}+\nu\chi_{11}-\left(1+\nu\right)\alpha_T\theta_2\right),$$
$$H=D_M\left(1-2\nu\right)\chi_{12},\ \ M_{13}=D_M\left(1-2\nu\right)\chi_{13},\ \ M_{23}=D_M\left(1-2\nu\right)\chi_{23},$$

де $D_N=\dfrac{Eh}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$, $D_M=\dfrac{Eh^3}{12\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$ – тангенціальна та згинна жорсткості; $\theta_1=\dfrac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\theta-\theta_0\right)d\alpha_3$, $\theta_2=\dfrac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\theta-\theta_0\right)\alpha_3 d\alpha_3$ – усереднені температурні характеристики; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення; θ_0 – початкове значення температури.

Якщо ввести вектор $\boldsymbol{\Phi}=\left\{\Phi^i\right\}_{i=1}^{11}=\left(h\theta_1,h\theta_1,h\theta_1,0,0,0,\dfrac{h^3}{12}\theta_2,\dfrac{h^3}{12}\theta_2,0,0,0\right)^T$, то вище наведений зв'язок у матричному записі набуде вигляду [9]

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{B\varepsilon}-\frac{\alpha_T E}{1-2\nu}\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{7}$$

Тут $\boldsymbol{B}$ – матриця пружних постійних [2].

Рівняння руху тонких оболонок, податливих до зсувів і стиснення в термінах зусиль і моментів мають вигляд [2,3]

$$
\begin{gathered}
-A_1A_2\rho h\ddot{u}_1+\partial_1\left(N_{11}A_2\right)-N_{22}\partial_1A_2+\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\partial_2A_1+\\
+\frac{1}{2}\left(\partial_2\left(\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_1A_1\right)+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_2\partial_2A_1\right)+k_1A_1A_2N_{13}^*+A_1\partial_2N_{12}^*=-P_1A_1A_2,\\
-A_1A_2\rho h\ddot{u}_2+\partial_2\left(N_{22}A_1\right)-N_{11}\partial_2A_1+\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\partial_1A_2+\\
+\frac{1}{2}\left(\partial_1\left(\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_2A_2\right)+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_1\partial_1A_2\right)+k_2A_1A_2N_{23}^*+A_2\partial_1N_{21}^*=-P_2A_1A_2,\\
-A_1A_2\rho h\ddot{u}_3+\partial_1\left(N_{13}^*A_2\right)+\partial_2\left(N_{23}^*A_1\right)-A_1A_2\left(N_{11}k_1+N_{22}k_2\right)=-P_3A_1A_2, \qquad (8)\\
-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_1+\partial_1\left(M_{11}A_2\right)-M_{22}\partial_1A_2+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\partial_2A_1-A_1A_2N_{31}^*+A_1\partial_2M_{12}^*=-A_1A_2m_1,\\
-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_2+\partial_2\left(M_{22}A_1\right)-M_{11}\partial_2A_1+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\partial_1A_2-A_1A_2N_{32}^*+A_2\partial_1M_{21}^*=-A_1A_2m_2,\\
-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_3+\partial_1\left(A_2M_{13}^*\right)+\partial_2\left(A_1M_{23}^*\right)-A_1A_2\left(N_{33}+k_1M_{11}+k_2M_{22}\right)=-A_1A_2m_3,
\end{gathered}
$$

де ρ – густина матеріалу і

$$
\begin{gathered}
N_{i3}^*=N_{i3}+(-1)^i\frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_{3-i}\left(N_{ii}-k_iM_{ii}\right)+\overset{1}{\omega}_{3-i}M_{ii}-\overset{0}{\omega}_iS-\overset{1}{\omega}_iH+\overset{0}{\omega}_3\left(2k_iM_{3-i\,3}-N_{3-i\,3}\right)-\overset{1}{\omega}_3M_{3-i\,3}\right),\\
N_{3i}^*=N_{i3}-(-1)^i\frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_{3-i}\left(N_{ii}+k_iM_{ii}\right)-\overset{1}{\omega}_{3-i}M_{ii}-\right.\\
\left.-\overset{0}{\omega}_i\left(S+2k_iH\right)-\overset{1}{\omega}_iH-\overset{0}{\omega}_3N_{3-i\,3}-\overset{1}{\omega}_3M_{3-i\,3}\right),
\end{gathered}
$$

,

$$
\begin{gathered}
N_{i\,3-i}^*=S+(-1)^i\frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_3\left(N_{11}+N_{22}-\left(k_1+2k_2\right)M_{11}-\left(2k_1+k_2\right)M_{22}\right)+\right.\\
\left.+\overset{1}{\omega}_3\left(M_{11}+M_{22}\right)-\overset{0}{\omega}_1\left(2k_2M_{13}-N_{13}\right)-\overset{1}{\omega}_1M_{13}+\overset{0}{\omega}_2\left(2k_1M_{23}-N_{23}\right)-\overset{1}{\omega}_2M_{23}\right), \qquad (9)\\
M_{i\,3-i}^*=H+(-1)^i\frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_3\left(M_{11}+M_{22}\right)-\overset{0}{\omega}_1M_{13}-\overset{0}{\omega}_2M_{23}\right),\\
M_{i3}^*=M_{i3}+(-1)^i\frac{1}{2}\left(\overset{0}{\omega}_{3-i}M_{ii}-\overset{1}{\omega}_iH-\overset{0}{\omega}_3M_{3-i\,3}\right),\quad i=1,2.
\end{gathered}
$$

Формули (9) виражають зв’язок між симетричними зусиллями S, N_{13}, N_{23}, моментами H, M_{13}, M_{23} та N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*.

Крайові умови на напруження на частині контуру серединної поверхні $\Gamma_\sigma\left(\Gamma_\sigma\in\Gamma\right)$ записують так:

$$
\begin{gathered}
N_t=N_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right)+N_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right)+\frac{1}{2}\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right)+\\
+\frac{1}{4}\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\left(k_1+k_2\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right),\\
N_s=\frac{1}{2}\left(N_{22}-N_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right)+N_{21}^*\cos^2\left(n,\alpha_1\right)-N_{12}^*\sin^2\left(n,\alpha_1\right)+\\
+\frac{1}{2}\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\left(k_2\cos^2\left(n,\alpha_1\right)-k_1\sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right), \qquad (10)\\
N_n=N_{13}^*\cos\left(n,\alpha_1\right)+N_{23}^*\sin\left(n,\alpha_1\right),
\end{gathered}
$$

$$M_t = M_{11}\cos^2(n,\alpha_1) + M_{22}\sin^2(n,\alpha_1) + \frac{1}{2}\left(M_{12}^* + M_{21}^*\right)\sin 2(n,\alpha_1),$$

$$M_s = \frac{1}{2}\left(M_{22} - M_{11}\right)\sin 2(n,\alpha_1) + M_{21}^*\cos^2(n,\alpha_1) - M_{12}^*\sin^2(n,\alpha_1),$$

$$M_n = M_{13}^*\cos(n,\alpha_1) + M_{23}^*\sin(n,\alpha_1).$$

Через (n,α_1) позначено кут між нормаллю до Γ і напрямом α_1, а також використано такі позначення усереднених характеристик навантаження:

$$P_i = \left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)d\alpha_3,$$

$$m_i = \frac{h}{2}\left(\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2}\right) +$$

$$+\int_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$\left[N_t, M_t\right] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t^{\Sigma}\left(1+\alpha_3 k_t\right)\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3,\ \left[N_s, M_s\right] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s^{\Sigma}\left(1+\alpha_3 k_s\right)\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3,$$

$$\left[N_n, M_n\right] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n^{\Sigma}\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3, \qquad i = 1,2,3.$$

Під k_t треба розуміти кривину бічної поверхні оболонки в напрямі нормалі до кривої Γ_σ (контуру серединної поверхні), а під k_s – кривину бічної поверхні в напрямі дотичної до Γ_σ.

Для встановлення кінематичної визначеності розглядуваної моделі оболонок необхідно додати крайові умови в зміщеннях на частині контуру серединної поверхні $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma$

$$\begin{gathered} u_t^g = u_1\cos(n,\alpha_1) + u_2\sin(n,\alpha_1), \\ u_s^g = -u_1\sin(n,\alpha_1) + u_2\cos(n,\alpha_1), \\ u_n^g = -u_3, \\ \gamma_t^g = \gamma_1\cos(n,\alpha_1) + \gamma_2\sin(n,\alpha_1), \\ \gamma_s^g = -\gamma_1\sin(n,\alpha_1) + \gamma_2\cos(n,\alpha_1), \\ \gamma_n^g = \gamma_3. \end{gathered} \tag{11}$$

Введені усереднені характеристики навантаження об'єднаємо у вектори

$\boldsymbol{P} = \left(P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3\right)^T$ – вектор зовнішнього навантаження;

$\boldsymbol{\sigma}_g = \left(N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n\right)^T$ – вектор крайових зусиль-моментів;

$\boldsymbol{u}_g = \left(u_t^g, u_s^g, u_n^g, \gamma_t^g, \gamma_s^g, \gamma_n^g\right)^T$ – вектор крайових зміщень.

Для подальшого використання чисельних методів систему рівнянь руху оболонок, податливих до зсувів та стиснення (8), статичні (10) та кінематичні (11) крайові умови запишемо для зручності у матричному вигляді [2,3]

$$\boldsymbol{C}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{P} - \boldsymbol{m}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 0, \ \forall t \in (0,T],$$

$$\boldsymbol{G}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^*\big|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_g, \ \boldsymbol{G}_u \boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_u} = \boldsymbol{u}_g, \ \forall t \in [0,T],$$

де

$$\boldsymbol{m} = diag\left(\rho h, \rho h, \rho h, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}\right).$$

Тут

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left\{\sigma_i^*\right\}_{i=1}^{15} = \left(N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*\right)^T$$

– вектор нововведених зусиль-моментів, який пов'язаний з симетричними (6) зусиллями-моментами формулами (9).

Для однозначного інтегрування системи рівнянь, крім статичних і геометричних крайових умов, треба задати ще початкові умови

$$\boldsymbol{u}(\alpha,0) = \boldsymbol{u}^0(\alpha), \ \dot{\boldsymbol{u}}(\alpha,0) = \boldsymbol{u}^1(\alpha).$$

3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА

Розв'язування задачі про нестаціонарне термопружне деформування тонких оболонок, податливих до зсувів і стиснення, пропонується методом скінченних елементів [1]. Тому сформулюємо варіаційну початково-крайову задачу геометрично нелінійної теорії розглядуваних оболонок.

Не зменшуючи загальності, допускатимемо, що частина Γ_u бічної поверхні оболонки жорстко защемлена, тобто

$$\boldsymbol{G}_u \boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_u} = 0.$$

Введемо функціональні простори

$$G = \left\{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6\right\}$$

і

$$V = \left\{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega)\right]^6 \middle| \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u\right\}$$

з нормою $\|\boldsymbol{v}\|_V^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\|v_i\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\xi_i\|_{W_2^1(\Omega)}^2\right)$ та позначимо через V' простір, спряжений до простору V. Тут $W_2^1(\Omega)$ – простір Соболєва функцій, квадрати яких разом зі своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω.

Вважаємо, що ці задачі задовольняють включення $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$, $\boldsymbol{\sigma}_g \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $\boldsymbol{P} \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $\boldsymbol{u}^0 \in V$, $\boldsymbol{u}^1 \in G$. Фіксуючи момент часу $t \in (0,T]$, $0 < T < +\infty$, помножимо скалярно рівняння руху (8) на довільний вектор $\boldsymbol{v} \in V$ і проінтегруємо результат по області Ω. Отримаємо таке варіаційне рівняння:

$$\mu(\ddot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}) + a_N(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = \langle L\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall t \in (0,T]. \tag{12}$$

Тут форми $a_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\mu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ і лінійний стосовно $\boldsymbol{v}$ функціонал $\langle L\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ мають такий вигляд:

$$a_N\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\iint_{\Omega}\left(\boldsymbol{v}\right)^T\left(\boldsymbol{C}_l+\left(\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{u}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_{\Omega}\boldsymbol{C}_{\Omega}\right)^T\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{C}_l+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{u}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_{\Omega}\boldsymbol{C}_{\Omega}\right)\boldsymbol{u}d\Omega\,, \tag{13}$$

$$\mu\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\iint_{\Omega}\rho\left(\sum_{i=1}^{3}\left(u_i v_i+\frac{h^2}{12}\gamma_i\xi_i\right)\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\,,$$

$$\left\langle L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right\rangle=\left\langle L,\boldsymbol{v}\right\rangle+\left\langle b_g\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right\rangle,\ \left\langle L,\boldsymbol{v}\right\rangle=\left\langle l,\boldsymbol{v}\right\rangle+\left\langle b,\boldsymbol{v}\right\rangle,$$

$$\left\langle l,\boldsymbol{v}\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}\iint_{\Omega}\left(P_iv_i+m_i\xi_i\right)d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\left(N_tv_t+N_sv_s+N_nv_n+M_t\xi_t+M_s\xi_s+M_n\xi_n\right)d\Gamma\,,$$

$$\left\langle b,\boldsymbol{v}\right\rangle=\iint_{\Omega}\left(\boldsymbol{C}_l\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{E}_0\frac{\alpha_TE}{1-2\nu}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta})d\Omega\,,$$

$$\left\langle b_g\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right\rangle=\iint_{\Omega}\left(\left(\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{u}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_{\Omega}\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{E}_0\frac{\alpha_TE}{1-2\nu}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta})d\Omega+$$
$$+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\boldsymbol{v}\right)^T\sum_{j=1}^{11}\frac{\alpha_TE}{1-2\nu}\Phi^j\left(\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{u}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{C}_{\Omega}\boldsymbol{u}d\Omega.$$

У (13) під $\boldsymbol{E}_0$ треба розуміти діагональну матрицю $\boldsymbol{E}_0=diag\left(1,1,1,2,2,2,1,1,2,2,2\right)$.

Зауважимо, що варіаційне формулювання задачі динаміки лінійної теорії оболонок, податливих до зсувів і стиснення, теж має вигляд (12), але вираз для форми $a_N\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ замінюємо на білінійну форму $a\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\iint_{\Omega}\left(\boldsymbol{C}_l\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_l\boldsymbol{u}d\Omega$, а $\left\langle L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right\rangle=\left\langle L,\boldsymbol{v}\right\rangle$.

Сформулюємо варіаційну початково-крайову задачу геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсувів і стиснення.

Задано

$$l\in L^2\left(0,T;V'\right),\ \boldsymbol{u}^0\in V\,,\ \boldsymbol{u}^1\in G\,,\ \boldsymbol{\theta}\in\left[L^2\left(\Omega\right)\right]^2.$$

Знайти вектор узагальнених переміщень

$$\boldsymbol{u}\in L^2\left(0,T;V\right)$$

такий, що

$$\mu\left(\ddot{\boldsymbol{u}}(t),\boldsymbol{v}\right)+a_N\left(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\right)=\left\langle L\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\right\rangle,\ \forall t\in\left(0,T\right], \tag{14}$$
$$\mu\left(\dot{\boldsymbol{u}}(0)-\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{v}\right)=0\,,\ a\left(\boldsymbol{u}(0)-\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{v}\right)=0\,,\ \forall\boldsymbol{v}\in V\,.$$

Для інтегрування в часі отриманої задачі (14) можливе застосування різних методів. Ми розв'язували задачу методом прямого інтегрування в часі, який базується на схемі Ньюмарка [1], а для розв'язування нелінійної системи застосовують метод Ньютона.

4. ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Досліджували задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглядали випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально-круговим законом $T = T_m e^{-kr^2}$, T_m – максимальна температура, k – коефіцієнт, який характеризує зосередженість нагріву.

Для безмежної пластини в припущенні, що температура разом зі своїми похідними на нескінченності зникає та в початковий момент дорівнює нулю, співвідношення для визначення температурного поля та пружних напружень у полярній системі координат (r, φ) для такої задачі визначені в [5]. Розрахунок проведений у випадку, коли $-0,075 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 0,075$, модуль Юнга матеріалу пластинки $E = 2,1 \cdot 10^5\,\text{МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, товщина $h = 0,01\,\text{м}$, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}$.

З огляду на симетричність задачі розглядали чверть пластини $-0,075 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 0$. На межах $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ задавали умови симетрії, а на $\alpha_1, \alpha_2 = -0,075$ напруження обчислені за формулами, які наведено у [5].

У [3] наведено порівняння результатів розрахунку напружень для цієї задачі, які отримали методом скінченних елементів геометрично лінійної моделі зсувних оболонок [3] з розглянутими у [5] в межах теорії пружності для усталеного теплового режиму.

У табл. подано порівняння результатів розрахунку термонапружень для цієї задачі, розглянутих у [3] в межах лінійної теорії зсувних оболонок, із результатами реалізованої методом скінченних елементів геометрично нелінійної моделі зсувних оболонок, описаної у цій праці.

Термонапруження в пластині

α_1	α_2	T	Лінійний розв'язок [3]		Нелінійний розв'язок	
			$\sigma_{11} \cdot 10^{-9}$Па	$\sigma_{22} \cdot 10^{-9}$Па	$\sigma_{11} \cdot 10^{-9}$Па	$\sigma_{22} \cdot 10^{-9}$Па
0.0	0.0	500.538	-0.623714	-0.623714	-0.623790	-0.623790
0.0	-0.0125	469.454	-0.599056	-0.693292	-0.599129	-0.693286
0.0	-0.025	387.499	-0.400005	-0.574792	-0.400093	-0.574717
0.0	-0.0375	281.908	-0.185094	-0.494685	-0.185172	-0.494595
0.0	-0.05	181.209	0.002666	-0.426596	0.265928	-0.426458
0.0	-0.0625	103.278	0.161136	-0.297487	0.161263	-0.297416
0.0	-0.075	52.4264	0.229693	-0.266249	0.230012	-0.266234
-0.0125	0.0	469.454	-0.693292	-0.599056	-0.693286	-0.599129
-0.025	0.0	387.499	-0.574792	-0.400005	-0.574717	-0.400093
-0.0375	0.0	281.908	-0.494685	-0.185094	-0.494595	-0.185172
-0.05	0.0	181.209	-0.426596	0.002666	-0.426458	0.265928
-0.0625	0.0	103.278	-0.297487	0.161136	-0.297416	0.161263
-0.075	0.0	52.4264	-0.266249	0.229693	-0.266234	0.230012

5. ВИСНОВКИ

Сформульовано початково-крайову задачу нестаціонарної термопружності. Математична модель заснована на геометрично нелінійній теорії оболонок, податливих до зсувів і стиснення. Фізичні співвідношення відображають гіпотезу Дюгамеля-Неймана.

З аналізу наведених результатів обчислень випливає, що пружні напруження, знайдені за уточненою теорією оболонок у нелінійному формулюванні, податливих до зсувів і стиснення, добре узгоджуються з результатами, отриманими в лінійному формулюванні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – Москва: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. *Вагін П.П.* Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П.П. Вагін, І.Я. Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177-184.
3. *Вагін П.П.* Дослідження нестаціонарного термопружного стану оболонок, податливих до зсувів та стиснення / П.П. Вагін, І.Я. Козій, Р.Б. Малець, Г.А. Шинкаренко // Вісник Одеського нац. ун-ту. Дослідження в математиці та механіці. – 2018. – Т. 23, Вип. 1 (31). – С. 23-32.
4. *Григоренко Я.М.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с.
5. *Коляно Ю.М.* Температурные напряжения в пластинке при двусторонней лазерной обработке / Ю.М. Коляно, И.И. Бернар // Проблемы прочности. – 1983, № 5. – С. 36-38.
6. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – Москва; Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 212 с.
7. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек / Б.Л. Пелех. – Львов: Вища школа, 1978. – 160 с.
8. *Подстригач Я.С.* Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.П. Швец. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.
9. *Vahin P.P.* Variational formulation of the problem of nonstationary thermoelasticity for thin shells compliant to shears and compression / P.P. Vahin, R.B. Malets', H.A. Shynkarenko // J. Math. Sci. – 2016. – 217, № 3. – P. 345-364.

Стаття: надійшла до редколегії 03.09.2018
доопрацьовано 17.10.2018
прийнята до друку 31.10.2018

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STATE OF GEOMETRIC NONLINEAR SHELLS GENERATED BY THERMAL LOADS

I. Bernakevych[1], P. Vahin[1], I. Koziy[1], H. Shynkarenko[1,2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: petro.vahin@lnu.edu.ua
[2]*Polytechnica Opolska, Opole, Poland, e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl*

A nonlinear initial-boundary problem for shells amenable to shear and compression has been formulated. The key equations for determining the non-stationary thermoelastic state of the mathematical model of shells under consideration have been noted. The problem of determining the thermal stresses of a plate, which is in uneven heating conditions has been numerically solved. The case when the plate is heated by heat exchange in accordance with Newton's law with an environment whose temperature is described by a normal-circular law was considered. The numerical solutions obtained in linear and geometrically nonlinear formations have been comparable.

Key words: shell, thermoelasticity, finite element method, geometric non-linearity.