ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Inform.*
2011. Вип. 17. С. 37–46 *2011. Is. 17. P. 37–46*

УДК 517.948

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. Шахно, Г. Ярмола

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Запропоновано двопараметричні однокроковий і двокроковий методи типу хорд для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Вивчено напівлокальну збіжність однокрокового методу у випадку, коли поділені різниці першого порядку задовольняють умову Ліпшиця з константою L. На тестових задачах проведено числове дослідження та зроблено порівняння отриманих результатів.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння, ітераційний процес, поділена різниця першого порядку, умова Ліпшиця.

1. ВСТУП

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$F(x) = 0\,, \tag{1}$$

де оператор F визначений в опуклій відкритій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння (1) часто застосовують класичний метод Ньютона з квадратичною швидкістю збіжності, який в обчислювальній формулі потребує аналітично заданих похідних. Також широко застосовують різницеві методи, які використовують поділені різниці першого порядку. Найпростіший різницевий метод – метод хорд з порядком збіжності $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Його досліджували багато авторів [6, 11, 12]. Менш відомим різницевим методом є метод лінійної інтерполяції Курчатова [3, 13], порядок збіжності якого, як і методу Ньютона, квадратичний. У [8 – 10] вивчено збіжність методу типу хорд з одним параметром. Багато авторів досліджували двокрокові модифікації відомих методів, зокрема диференціальний метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [1, 16], різницевий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [2, 14, 15] і двокроковий варіант методу Курчатова. У [4] досліджено комбінований варіант методу Ньютона-Канторовича для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь.

У праці [7] ми дослідили локальну збіжність двопараметричного методу типу хорд у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця з усередненим L. Цей метод набув вигляду

$$x_{k+1} = x_k - F(u_k, v_k)^{-1} F(x_k),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{2}$$

де $F(u_k, v_k)$ – поділена різниця першого порядку оператора F за точками u_k та v_k, $u_k = x_k + a_n(x_{k-1} - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(x_{k-1} - x_k)$, $a_k \in [-1;1]$, $b_k \in [0;1]$. При певному виборі параметрів a_k, b_k отримаємо вищезгадані методи. Також в [7] введено двокрокову модифікацію методу типу хорд

$$x_{k+1} = x_k - F(u_k, v_k)^{-1} F(x_k),$$
$$y_{k+1} = x_{k+1} - F(u_k, v_k)^{-1} F(x_{k+1}),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{3}$$

де $u_k = x_k + a_k(y_k - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(y_k - x_k)$, $a_k \in [-1;1]$, $b_k \in [0;1]$. Метод (3) містить деякі відомі методи [1, 2, 14 – 16].

Мета нашої праці – вивчити напівлокальну збіжність однокрокового методу (2), розглянути застосування двопараметричних методів (2) і (3) для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, подати результати проведених чисельних експериментів.

2. НАПІВЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ ОДНОКРОКОВОГО МЕТОДУ (2)

Дослідження напівлокальної збіжності методу (2) проведено у випадку, коли поділені різниці першого порядку для оператора F задовольняють умову Ліпшиця. Обмежений лінійний оператор $F(x,y)$ називається поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x та y ($x \neq y$), якщо виконується рівність

$$F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y).$$

Теорема 1. Нехай $x_0 \in D$ – початкове наближення, $S_0 = \{x \in D : \|x - x_0\| < R\}$. Припустимо, що виконуються умови:

1) $\|x_{-1} - x_0\| = \alpha$;
2) існує $F(u_0, v_0)^{-1} = A_0^{-1}$ і $\|A_0^{-1}\| \le \beta$;
3) $\|A_0^{-1} F(x_0)\| \le \eta$;
4) поділені різниці першого порядку оператора F задовольняють умову Ліпшиця з константою L
$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|),$$

де $x,\ y,\ u,\ v \in S_0$, $L > 0$.

Позначимо через $m = \max\{\beta L(\eta + (a+b)\alpha), \beta L(1+a+b)\eta\}$, припустимо, що $|a_k| \le a$, $b_k \le b$ і

$$u\left(1 - \frac{m}{1 - \beta L((2+a+b)u + (a+b)\alpha)}\right) - \eta = 0 \tag{4}$$

має хоча б один додатний корінь, причому R – найменший додатний. Якщо

$$\beta L((2+a+b)R + (a+b)\alpha) < 1,\ M = \frac{m}{1 - \beta L((2+a+b)R + (a+b)\alpha)} < 1,$$

і $\overline{S}_0 \subset D$, тоді послідовність $\{x_k\}$, утворена ітераційним процесом (2), коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку $x_* \in \overline{S}_0$ рівняння (1).

Доведення. Доведення проводять аналогічно як у [8, 10]. Позначимо через $A_k = F(u_k, v_k)$. Згідно з (2) $x_1 = x_0 - A_0^{-1} F(x_0)$. Враховуючи умови теореми, отримаємо, що $\|x_1 - x_0\| = \|-A_0^{-1} F(x_0)\| \le \eta < R$. Отже, $x_1 \in S_0$.

Враховуючи умову 4 теореми, одержимо

$$\left\|I - A_0^{-1}A_1\right\| = \left\|A_0^{-1}\left(A_0 - A_1\right)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\|\left\|A_0 - A_1\right\| \le \beta L\left(\left\|u_0 - u_1\right\| + \left\|v_0 - v_1\right\|\right).$$

Оскільки

$$\left\|u_0 - u_k\right\| = \left\|x_0 + a_0\left(x_{-1} - x_0\right) - x_k - a_k\left(x_{k-1} - x_k\right)\right\| \le \left\|x_0 - x_k\right\| + \left|a_0\right|\left\|x_{-1} - x_0\right\| + \left|a_k\right|\left\|x_{k-1} - x_k\right\|,$$

$$\left\|v_0 - v_k\right\| = \left\|x_0 + b_0\left(x_{-1} - x_0\right) - x_k - b_k\left(x_{k-1} - x_k\right)\right\| \le \left\|x_0 - x_k\right\| + b_0\left\|x_{-1} - x_0\right\| + b_k\left\|x_{k-1} - x_k\right\|,$$

то

$$\left\|I - A_0^{-1}A_1\right\| \le \beta L\left(\left(2 + a + b\right)\left\|x_0 - x_1\right\| + \left(a + b\right)\left\|x_{-1} - x_0\right\|\right)$$

$$\le \beta L\left(\left(2 + a + b\right)\eta + \left(a + b\right)\alpha\right) < \beta L\left(\left(2 + a + b\right)R + \left(a + b\right)\alpha\right) < 1.$$

За теоремою Банаха A_1^{-1} існує і $\left\|A_1^{-1}\right\| < \dfrac{\beta}{1 - \beta L\left(\left(2 + a + b\right)R + \left(a + b\right)\alpha\right)}$.

З означення поділеної різниці першого порядку і формули (2) отримаємо

$$F\left(x_1\right) = F\left(x_0\right) - F\left(x_0, x_1\right)\left(x_0 - x_1\right) = \left(A_0 - F\left(x_0, x_1\right)\right)\left(x_0 - x_1\right).$$

Врахувавши умову Ліпшиця 4, одержимо

$$\left\|F\left(x_1\right)\right\| = \left\|\left(A_0 - F\left(x_0, x_1\right)\right)\left(x_0 - x_1\right)\right\| \le \left\|A_0 - F\left(x_0, x_1\right)\right\|\left\|x_0 - x_1\right\|$$

$$\le L\left(\left\|u_0 - x_0\right\| + \left\|v_0 - x_1\right\|\right)\left\|x_0 - x_1\right\| \le L\left(\left(a + b\right)\left\|x_{-1} - x_0\right\| + \left\|x_0 - x_1\right\|\right)\left\|x_0 - x_1\right\|$$

$$\le L\left(\left(a + b\right)\alpha + \eta\right)\left\|x_0 - x_1\right\| < L\left(\left(a + b\right)\alpha + R\right)\left\|x_0 - x_1\right\|.$$

Звідси випливає, що x_2 коректно визначена. Крім того,

$$\left\|x_2 - x_1\right\| \le \left\|A_1^{-1}\right\|\left\|F\left(x_1\right)\right\| < \frac{m}{1 - \beta L\left(\left(2 + a + b\right)R + \left(a + b\right)\alpha\right)}\left\|x_1 - x_0\right\| = M\left\|x_1 - x_0\right\| < \eta.$$

З іншого боку, оскільки R – розв'язок рівняння (4), то

$$\left\|x_2 - x_0\right\| \le \left\|x_2 - x_1\right\| + \left\|x_1 - x_0\right\| < (M + 1)\eta < R$$

і $x_2 \in S_0$.

Припустимо, що для $i = \overline{1, k-1}$ лінійні оператори A_i оборотні і $x_{i+1} \in S_0$. Для $i = k$ отримаємо

$$\left\|I - A_0^{-1}A_k\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\|\left\|A_0 - A_k\right\| \le \beta L\left(\left\|u_0 - u_k\right\| + \left\|v_0 - v_k\right\|\right)$$

$$\le \beta L\left(\left(2 + a + b\right)\eta + \left(a + b\right)\alpha\right) < \beta L\left(\left(2 + a + b\right)R + \left(a + b\right)\alpha\right) < 1$$

і $\left\|A_k^{-1}\right\| < \dfrac{\beta}{1 - \beta L\left(\left(2 + a + b\right)R + \left(a + b\right)\alpha\right)}$.

З означення поділеної різниці першого порядку, формули (2), та врахувавши умову 4 теореми, отримаємо

$$F\left(x_k\right) = F\left(x_{k-1}\right) - F\left(x_{k-1}, x_k\right)\left(x_{k-1} - x_k\right) = \left(A_{k-1} - F\left(x_{k-1}, x_k\right)\right)\left(x_{k-1} - x_k\right),$$

$$\left\|F\left(x_k\right)\right\| = \left\|\left(A_{k-1} - F\left(x_{k-1}, x_k\right)\right)\left(x_{k-1} - x_k\right)\right\| \le \left\|A_{k-1} - F\left(x_{k-1}, x_k\right)\right\|\left\|x_{k-1} - x_k\right\|$$

$$\le L\left(\left\|u_{k-1} - x_{k-1}\right\| + \left\|v_{k-1} - x_k\right\|\right)\left\|x_{k-1} - x_k\right\| \le L\left(\left(a + b\right)\eta + \eta\right)\left\|x_{k-1} - x_k\right\|.$$

Отже,

$$\|x_{k+1}-x_k\| \le \|A_k^{-1}\|\|F(x_k)\| < \frac{m}{1-\beta L((2+a+b)R+(a+b)\alpha)}\|x_k - x_{k-1}\|$$
$$= M\|x_k - x_{k-1}\| < M^k\|x_1 - x_0\| < \eta.$$

З іншого боку, врахувавши, що R – розв'язок рівняння (4), то

$$\|x_{k+1}-x_0\| \le \|x_{k+1}-x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\|$$
$$< (M^k + M^{k-1} + \ldots + 1)\|x_1 - x_0\| = \frac{1-M^{k+1}}{1-M}\|x_1 - x_0\| < \frac{1}{1-M}\eta = R$$

і $x_{k+1} \in S_0$.

Покажемо, що $\{x_k\}$ – послідовність Коші. Справді,

$$\|x_{k+p}-x_k\| \le \|x_{k+p}-x_{k+p-1}\| + \|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}\| + \ldots + \|x_{k+1}-x_k\|$$
$$< (M^{p-1} + M^{p-2} + \ldots + 1)\|x_{k+1}-x_k\| = \frac{1-M^p}{1-M}\|x_{k+1}-x_k\| < \frac{1}{1-M}M^k\|x_1 - x_0\|.$$

Отже, $\{x_k\}$ – послідовність Коші і збігається до $x_* \in \overline{S}_0$.

Покажемо, що x_* – розв'язок рівняння (1) і він єдиний. Оскільки

$$\|F(x_k)\| \le L((a+b)\eta + \eta)\|x_k - x_{k-1}\|$$

і $\|x_k - x_{k-1}\| \to 0$ при $k \to \infty$, то $F(x_*) = 0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x_{**} \in \overline{S}_0$, $x_{**} \ne x_*$ і $F(x_{**}) = 0$. Позначимо $F(x_{**}, x_*) = H$. За означенням поділеної різниці першого порядку $H(x_{**} - x_*) = F(x_{**}) - F(x_*)$. Якщо оператор H оборотний, то $x_{**} = x_*$. Справді,

$$\|A_0^{-1}H - I\| = \|A_0^{-1}(H - A_0)\| \le \|A_0^{-1}\|\|H - A_0\| \le \beta L(\|x_{**} - u_0\| + \|x_* - v_0\|)$$
$$\le \beta L(\|x_{**} - x_0\| + \|x_* - x_0\| + (a+b)\|x_{-1} - x_0\|) \le \beta L(2R + (a+b)\alpha) < 1$$

Отже, H^{-1} існує. Теорема 1 доведена. □

3. ІТЕРАЦІЙНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задано нелінійне інтегральне рівняння

$$F(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt = 0, \tag{5}$$

де функції $K(s,t,x)$ і $K_x'(s,t,x)$ неперервні за всіма аргументами, $s \in [0,1]$.

Застосовуючи метод (2) для розв'язування (5), отримаємо такі формули:

$$\begin{aligned}&\Delta x_{k+1}(s) - \int_0^1 H_k(s,t)\Delta x_{k+1}(t)\,dt = -\left(x_k(s) - \int_0^1 K(s,t,x_k(t))\,dt\right),\\ &x_{k+1}(s) = x_k(s) + \Delta x_{k+1}(s),\end{aligned} \tag{6}$$

де

$$H_k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{K\left(s,t,x_k(t)+a_k\left(x_{k-1}(t)-x_k(t)\right)\right)-K\left(s,t,x_k(t)+b_k\left(x_{k-1}(t)-x_k(t)\right)\right)}{a_k\left(x_{k-1}(t)-x_k(t)\right)-b_k\left(x_{k-1}(t)-x_k(t)\right)}, & a_k\neq b_k,\\ K'\left(s,t,x_k(t)+a_k\left(x_{k-1}(t)-x_k(t)\right)\right), & a_k=b_k.\end{cases}$$

Аналогічно для (3) одержимо

$$\begin{aligned}&\Delta x_{k+1}(s)-\int_0^1 H_k(s,t)\Delta x_{k+1}(t)\,dt=-\left(x_k(s)-\int_0^1 K\left(s,t,x_k(t)\right)dt\right),\\ &x_{k+1}(s)=x_k(s)+\Delta x_{k+1}(s),\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\Delta y_{k+1}(s)-\int_0^1 H_k(s,t)\Delta y_{k+1}(t)\,dt=-\left(x_{k+1}(s)-\int_0^1 K\left(s,t,x_{k+1}(t)\right)dt\right),\\ &y_{k+1}(s)=x_{k+1}(s)+\Delta y_{k+1}(s),\end{aligned}\tag{8}$$

де

$$H_k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{K\left(s,t,x_k(t)+a_k\left(y_k(t)-x_k(t)\right)\right)-K\left(s,t,x_k(t)+b_k\left(y_k(t)-x_k(t)\right)\right)}{a_k\left(y_k(t)-x_k(t)\right)-b_k\left(y_k(t)-x_k(t)\right)}, & a_k\neq b_k,\\ K'\left(s,t,x_k(t)+a_k\left(y_k(t)-x_k(t)\right)\right), & a_k=b_k.\end{cases}$$

Як бачимо, застосувавши однокроковий і двокроковий методи для розв'язування нелінійного інтегрального рівняння, на кожній ітерації отримаємо лінійні інтегральні рівняння. Для чисельного розв'язування інтегральних рівнянь у (6), (7), (8) застосовуємо метод квадратур.

4. ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ (6)

Нехай простір $X=C[0,1]$. Правильна така теорема.

Теорема 2. Нехай $x_0(s)\in C[0,1]$ – початкове наближення, $S_0=\left\{x(s)\in C[0,1]:\max\limits_{0\le s\le 1}\left|x(s)-x_0(s)\right|<R\right\}$. Припустимо, що виконуються умови:

1) $\max\limits_{0\le s\le 1}\left|x_{-1}(s)-x_0(s)\right|=\alpha$;
2) для ядра $H_0(s,t)$ існує резольвента $G_0(s,t)$ і $\max\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1\left|G_0(s,t)\right|dt\le C$;
3) $(C+1)\max\limits_{0\le s\le 1}\left|\int_0^1 K\left(s,t,x_0(t)\right)dt-x_0(s)\right|\le\eta$;
4) функція $K(s,t,x)$ має поділені різниці першого порядку, які задовольняють умову

$$\max_{0\le s\le 1}\left|\int_0^1\frac{K\left(s,t,x(t)\right)-K\left(s,t,y(t)\right)}{x(t)-y(t)}dt-\int_0^1\frac{K\left(s,t,u(t)\right)-K\left(s,t,v(t)\right)}{u(t)-v(t)}dt\right|$$
$$\le L\left(\max_{0\le s\le 1}\left|x(s)-u(s)\right|+\max_{0\le s\le 1}\left|y(s)-v(s)\right|\right),$$

де $x,\ y,\ u,\ v \in S_0$.

Позначимо через $m = \max\left\{\beta L\left(\eta + \left(a+b\right)\alpha\right), \beta L\left(1+a+b\right)\eta\right\}$, $\beta = C+1$, припустимо, що $\left|a_k\right| \le a$, $b_k \le b$ і рівняння

$$u\left(1 - \frac{m}{1-\beta L\left(\left(2+a+b\right)u + \left(a+b\right)\alpha\right)}\right) - \eta = 0 \tag{9}$$

має хоча б один додатний корінь, причому R – найменший додатний. Якщо

$$\beta L\left(\left(2+a+b\right)R + \left(a+b\right)\alpha\right) < 1,\ M = \frac{m}{1-\beta L\left(\left(2+a+b\right)R + \left(a+b\right)\alpha\right)} < 1,$$

тоді послідовність $\left\{x_k\right\}$, утворена ітераційним процесом (6), коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку $x_* \in \overline{S}_0$ рівняння (5).

Доведення теореми 2 проводять аналогічно до доведення теореми 1.

5. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для чисельного дослідження методів було розглянуто тестові задачі. Нижче подано результати для таких інтегральних рівнянь.

Приклад 1 [8].

$$x\left(s\right) = s - s\int_0^1 \frac{\cos\left(x\left(t\right)\right)}{2}dt. \tag{10}$$

Приклад 2 [5].

$$x\left(s\right) = 3 + 0.6625s + \int_0^1 0.05stx^2\left(t\right)dt. \tag{11}$$

Приклад 3.

$$x\left(s\right) = \frac{s}{10}\int_0^1 \frac{1+x^2\left(t\right)}{1+t^2}dt. \tag{12}$$

Для усіх методів було використано однаковий критерій зупинки ітераційного процесу: $\max\limits_{0\le i\le m}\left|x_{k+1}^i - x_{k+1}^i\right| \le \varepsilon$ і $\max\limits_{0\le i\le m}\left|F_i\left(x_{k+1}\right)\right| \le \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Додаткове початкове наближення обирали так: $x_{-1}^i = y_0^i = x_0^i + 10^{-4}$, $i = \overline{0,m}$. Для наближеного обчислення інтеграла застосовували формулу трапецій з кроком $h = \dfrac{1}{m}$

$$\int_0^1 K\left(s,t,x\left(t\right)\right)dt \approx \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}K\left(s,t_0,x^0\right) + \sum_{i=1}^{m-1}K\left(s,t_i,x^i\right) + \frac{1}{2}K\left(s,t_m,x^m\right)\right),$$

де $x^i \approx x\left(ih\right)$.

У табл. 1 подано кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв'язку інтегрального рівняння (10): у лівій колонці – однокроковим методом, у правій – двокроковим. Числові експерименти проводили при кількості точок інтегрування $m = 100$, початкове наближення $x_0\left(s\right) = 1.5$, $s \in \left[0,1\right]$. Як видно з отриманих результатів, двокрокові методи збігаються швидше, ніж однокрокові, що узгоджується з теоретичними результатами.

Таблиця 1

Кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв'язку

$b \backslash a$	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	7	6	6	5
-0.5	7	6	6	5	6
0	6	6	5	6	6
0.5	6	5	6	7	7
1	5	6	6	7	7

$b \backslash a$	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	6	6	5	5	5
-0.5	6	5	5	5	5
0	5	5	5	5	5
0.5	5	5	5	5	5
1	5	5	5	5	5

У табл. 2 подано наближене значення розв'язку інтегрального рівняння (11) в точці $s=1$, отримане методом хорд і двокроковим різницевим методом з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, та значення норми поправки. Початкове наближення обране у вигляді $x_0(s)=3$, розв'язок цього рівняння $x_*(s)=s+3$, $s\in[0,1]$.

Таблиця 2

Розв'язок рівняння (11) в точці $s=1$ та значення поправки на k-й ітерації

Номер ітерації	Однокроковий метод $a_k=0$, $b_k=1$		Двокроковий метод $a_k=0$, $b_k=1$	
	$x_k(s)$, $s=1$	$\lVert x_k-x_{k-1}\rVert$	$x_k(s)$, $s=1$	$\lVert x_k-x_{k-1}\rVert$
0	3	10^{-4}	3	10^{-4}
1	3.98611842	0.98611842	3.98611842	0.98611842
2	3.99981154	0.01369313	4.00000708	0.01388866
3	4.00000710	0.00019556	4.00000714	6.46402709×10^{-8}
4	4.00000714	3.88053692×10^{-8}	4.00000714	1.92587459×10^{-18}
5	4.00000714	1.08443671×10^{-13}		

Знайдемо R, за якого виконуються умови теореми 2. Обчислення проведемо для інтегрального рівняння (12). Приймемо $x_0(s)=0$, $s\in[0,1]$, $a_k=a=const$, $b_k=b=const$. Ядро інтегрального рівняння (6) при $k=0$ і $a\neq b$ набуває вигляду

$$H_0(s,t)=\frac{s}{10\left(1+t^2\right)}\frac{u_0^2(t)-v_0^2(t)}{u_0(t)-v_0(t)}=\frac{s}{10\left(1+t^2\right)}\left(u_0(t)+v_0(t)\right)$$

$$=\frac{s}{1+t^2}\frac{\left(2\cdot x_0(t)+10^{-4}(a+b)\right)}{10}=B\frac{s}{1+t^2}.$$

Якщо $\frac{B\ln(2)}{2}<1$, то резольвента цього рівняння з ядром $H_0(s,t)$ набуває вигляду

$$G_0(s,t)=\frac{2B}{2-B\ln(2)}\frac{s}{1+t^2}.$$

Обчислимо значення констант, які зазначені в теоремі 2 і входять в рівняння (9):

1) $\alpha=10^{-4}$;

2) $\left|\frac{2B}{2-B\ln(2)}\right|\max\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1\left|\frac{s}{1+t^2}\right|dt\le\left|\frac{2B}{2-B\ln(2)}\right|\max\limits_{0\le s,t\le 1}\left|\frac{s}{1+t^2}\right|=\left|\frac{2B}{2-B\ln(2)}\right|=C$;

3) $(C+1)\max\limits_{0\le s\le 1}\left|\frac{s}{10}\int_0^1\frac{\left(1+x_0^2(t)\right)}{1+t^2}dt-x_0(s)\right|=\eta$;

4) $$\frac{s}{10}\left\{\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\frac{x^2(t)-y^2(t)}{x(t)-y(t)}dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\frac{u^2(t)-v^2(t)}{u(t)-v(t)}dt\right\}$$

$$=\frac{s}{10}\left\{\int_0^1\frac{x(t)+y(t)}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{u(t)+v(t)}{1+t^2}dt\right\}=\frac{s}{10}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\left\{\left(x(t)-u(t)\right)+\left(y(t)-v(t)\right)\right\}dt,$$

$$\max_{0\le s\le 1}\left|\frac{s}{10}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\left\{\left(x(t)-u(t)\right)+\left(y(t)-v(t)\right)\right\}dt\right|$$

$$\le\frac{1}{10}\max_{0\le s\le 1}\int_0^1\left|\frac{s}{1+t^2}\right|dt\left(\max_{0\le t\le 1}\left|x(t)-u(t)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|y(t)-v(t)\right|\right)$$

$$\le\frac{1}{10}\int_0^1\max_{0\le s,t\le 1}\left|\frac{s}{1+t^2}\right|dt\left(\max_{0\le s\le 1}\left|x(s)-u(s)\right|+\max_{0\le s\le 1}\left|y(s)-v(s)\right|\right).$$

Отже, $L=0.1$.

Таблиця 3

Значення констант, які зазначені в теоремі 2, для методу хорд і методу Курчатова

Позначення	Метод (6) з параметрами $a=0$, $b=1$	Метод (6) з параметрами $a=-1$, $b=1$
B	0.000010	0
C	0.000001	0
β	1.000001	1
η	0.078540	0.078540
m	0.006169	0.015708

З умови $\beta L\left((2+a+b)R+(a+b)\alpha\right)<1$ отримуємо обмеження на значення радіуса збіжності: для методу хорд – $0<R<3.3333$, для методу Курчатова – $0<R<2.49995$. Розв'язавши рівняння (9), знаходимо значення радіуса R як найменший додатний корінь. Для методу хорд отримаємо $R=0.07983$, для методу Курчатова – $R=0.08050$. Також маємо, що $\eta<R$ та $M<1$.

6. ВИСНОВКИ

Отже, ми розглянули двопараметричні методи типу хорд, вивчили напівлокальну збіжність однокрокового методу, розглянуто застосування двопараметричних однокрокового і двокрокового методів типу хорд для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Сформулювали теорему про напівлокальну збіжність однокрокового методу типу хорд для розв'язування нелінійного інтегрального рівняння. На тестових прикладах дослідили вплив параметрів на швидкість збіжності методів і перевірили виконання умов теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бартіш М. Я.* Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь / М. Я. Бартіш // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – №. 5. – С. 387–391.
2. *Бартіш М. Я.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь / М. Я. Бартіш, Ю. М. Щербина // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579–582.
3. *Курчатов В. А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений / В. А. Курчатов // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. – 1971. – Т.198, № 3. – С. 524–526.
4. *Никулин В. Л.* О сходимости комбинированного варианта метода Ньютона-Канторовича и его применении для решения нелинейных операторных уравнений / В. Л. Никулин // Сборник по вычислительной математике. – Издательство Иркутского государственного педагогического института – 1973. – С. 46–57.
5. *Ульм С.* Алгорифмы обобщенного метода Стеффенсена / С. Ульм // Известия АН Эстонской ССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, № 3. – С. 435–443.
6. *Шахно С .М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, №1. – С.79–86.
7. *Шахно С. М.* Двопараметричні методи типу хорд для розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно, С. І. Граб, Г. П. Ярмола // Вісник Львівського університету. Серія прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15 – С. 117–127.
8. *Amat S.* On a higher order Secant method / S. Amat, S. Busquier // Appl. Math. Comp. – 2003. – Vol. 141. – P. 321–329.
9. *Chen J., Shen Z.* Convergence analysis of the secant type method / J. Chen, Z. Shen // AMC (Appl. Math. Comp.). – 2007. – Vol. 188. – P. 514–524.
10. *Hernandez M. A.* A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 275. – P. 821–834.
11. *Hernandez M. A.* The Secant method and divided differences Hölder continuous / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // Appl. Math. Comp. – 2001. – Vol. 124. – P. 139–149.
12. *Schmidt J. W.* Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen I, II / J. W. Schmidt // Z. Angew. Math. Mech. – 1963. V. 43. – P. 1–8, 97–110.
13. *Shakhno S. M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations / S. M. Shakhno // PAMM – Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – Vol. 4. – P. 650–651.
14. *Shakhno S. M.* On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations / S. M. Shakhno // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – Vol. 231. – P. 222–235.

15. *Vaarmann O.* High order iterative methods for decomposition-coordination problems / Vaarmann O. // Technological and economic developmeny of economy. – 2006. – Vol. 12, № 1. – P. 55–61.

16. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung / W. Werner // Numer. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 333–342.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Шахно, Г. Ярмола

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Предложены двухпараметрические одношаговый и двухшаговый методы типа хорд для решения нелинейных интегральных уравнений. Изучена полулокальная сходимость одношагового метода в случае, когда разделенные разности удовлетворяют условию Липшица. На тестовых задачах проведено численное исследование и сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, итерационный процесс, разделенная разность первого порядка, условие Липшица.

APPLICATION OF TWOPARAMETRIC DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

S. Shakhno, H. Yarmola

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail:kom@franko.lviv.ua

Twoparametric one-step and two-step secant type methods for solving nonlinear integral equations are proposed. Semilocal convergence of one-step method is studied in the case when divided differences satisfy the Lipschitz condition. Numerical experiments on testing problems are presented and the received results are compared.

Key words: nonlinear integral equation, iterative method, divided difference of first order, Lipschitz condition.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2010
Прийнята до друку 26.01.2011