

УДК 532.543

ОДИН ІЗ ПІДХОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУСЛОВОГО СТОКУ РІДИНИ

П. Венгерський, Я. Коковська

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

Розглянуто підхід до моделювання стоку нестисливої рідини у псевдопризматичному руслі з вертикальною площиною симетрії. Описано умови стійкості для встановленого потоку. Введено і проаналізовано значення корективу середньої швидкості для різних видів потоків у річках. Наведено варіаційне формулювання задачі, яку розв'язували методом скінченних елементів. Результати протестовано на прикладі, що має аналітичний розв'язок, а також виконано порівняння результатів обчислень із лабораторними дослідженнями інших авторів.

Ключові слова: рівняння руху рідини, швидкість потоку, переріз русла, напірний рух, радіус кривини середньої лінії дна, проекційні рівняння, схема Гальоркіна, метод скінченних елементів, однокрокова рекурентна схема, лінеаризація.

1. ВСТУП

Сьогодні гідрологічні системи, до яких можна зачислити річкові басейни, ріки, озера, зазнають сильного антропогенного впливу. Господарська діяльність на водозборі, використання водних ресурсів та зумовлені перетворенням природного середовища регіональні і глобальні зміни клімату не можуть не спричинити зміни у гідрологічному циклі та в процесах формування річкового стоку.

Виникає потреба оцінювати ці зміни і, якщо можливо, передбачити стан гідрологічних систем у майбутньому. Деколи такі оцінки можна зробити на підставі даних експериментальних дослідів шляхом порівняння гідрологічних характеристик до і після антропогенного впливу. Однак можливості таких оцінок дуже обмежені, оскільки гідрометеорологічні умови сильно змінюються [4,10]. Головні перспективи розвитку методів досліджень і передбачень поведінки природних систем сьогодні вирішуються за допомогою їхнього математичного моделювання.

2. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ПОТОКУ

Запишемо систему рівнянь, які характеризують рух рідини:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial ui}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vi}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wi}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Рівняння (1) – це рівняння нерозривності для нестисливої рідини, а (2) – (4) – рівняння Нав'є – Стокса.

Прийmemo за координатну лінію x_1 лінію середнього дна, а за координатні лінії x_2 і x_3 – прямі, що лежать у нормальній до лінії дна площині так, що x_2 напрямлене горизонтально. Припущення про малість глибини потоку порівняно з радіусом кривини лінії середнього дна пов'язане якраз із цим вибором системи координат.

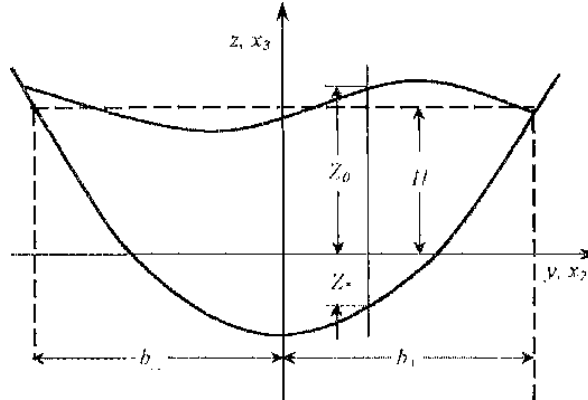


Рис. 1. Поперечний переріз потоку

Нехай далі u, v, w і X, Y, Z – проекції вектора швидкості v і вектора прискорення об'ємних сил F на осі x_1, x_2, x_3 .

Проінтегруємо рівняння (1) за площею поперечного перерізу потоку (рис.1), не роблячи поки що ніяких припущень про форму вільної поверхні:

$$\frac{1}{F} \int_{b_2}^{b_1} dy \int_{z_0}^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (5)$$

Використаємо формулу диференціювання під знаком інтеграла, і враховуючи симетричність русла відносно площини XOZ , коли всі інтеграли за F , що містять $\frac{\partial}{\partial y}$, дорівнюють нулю, отримаємо

$$\frac{1}{F} \int_{b_2}^{b_1} dy \int_{z_0}^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (6)$$

Оскільки на поверхні дна потоку ($z = z_0$) вектор швидкості дорівнює нулю, то $u_{z=z_0} = 0$.

Використаємо формулу

$$w_{z=H} = \frac{\partial H}{\partial t} + u_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7)$$

і те, що величина $\int_{b_2}^{b_1} \int_{z_0}^H u dz dy = Q$ – це розхід потоку, тоді рівняння (6) запишемо так:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} B = 0. \quad (8)$$

Перейдемо до рівнянь руху. Очевидно, що для потоку в полі сили тяжіння $X = g \sin \delta, Y = 0, Z = -g \cos \delta = -g_*$, де g – прискорення сили тяжіння, δ – гострий кут між горизонтальною площиною і дотичною до лінії середнього дна. Проінтегруємо рівняння (4) за z і використаємо знову формулу диференціювання під знаком інтеграла, формулу (7) і те, що на вільній поверхні ($z = H$) всі напруження дорівнюють нулю, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = \frac{p_H}{\rho} + (H - z_0)g_* - w^2 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^H w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H w u dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^H w v d\xi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H \tau_{zx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^H \tau_{zy} dz - \tau_{zz} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Величина p_H у цій формулі є тиском на вільній поверхні.

Підставимо це значення p в рівняння (2), проінтегруємо результат за площею поперечного перерізу F : за z від z_0 до H і за y від b_- до b_+ , після простих, але дуже копітких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_0}^{z_0} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_0}^{z_0} u^2 dz = g \left(\sin \delta - \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \int_{b_-}^{b_+} \int_{z_0}^{z_0} dz dy - \\ - \frac{1}{\rho} \int_{b_-}^{b_+} (\tau_{zx})_{z=z_0} dy + A + I_u + R_u + I_v + R_v + D. \end{aligned} \quad (10)$$

Для другого члена правої частини в гідравліці турбулентних потоків визначено відомий емпіричний вираз

$$\frac{1}{\rho g F} \int_{b_-}^{b_+} (\tau_{zx})_{z=z_0} dy = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{U^2}{C^2 R}, \quad (11)$$

де $K = CF\sqrt{R}$ – пропускна здатність русла; K – його гідравлічний радіус; C – коефіцієнт Шезі. Тепер рівняння (10) матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t} \right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R} + \varepsilon. \quad (12)$$

Тут

$$\varepsilon = \frac{1}{gF} (A + I_u + I_v + R_u + R_v + D). \quad (13)$$

Якщо в рівнянні (12) знехтувати членом ε і прийняти $\alpha = \text{const}$, то отримаємо звичайне гідравлічне рівняння одновимірного невстановленого, повільно-змінного руху.

Отже, наша система матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t} \right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R}.$$

3. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ВСТАНОВЛЕНОГО ПОТОКУ

Розглянемо наслідки малої зміни рівномірного потоку в псевдопризматичному руслі. За цих умов припустимо, що

$$H = H_0 + \Delta H; \quad Q = Q_0 + \Delta Q; \quad K = K_0 + K'_0 \Delta H, \quad (15)$$

де H_0, Q_0, K_0 – сталі значення, які зберігають H, Q, K за умов рівномірного потоку,

$$K' = \frac{dK}{dH}.$$

Запишемо перше і друге рівняння системи (14) через розхід потоку Q і пропускну здатність русла $K = CF\sqrt{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(HB)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{1}{g} \frac{1}{F} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\alpha}{g} \frac{QB}{F^2} \frac{\partial H}{\partial t} + (1 - \alpha \frac{Q^2 B}{F^3 g}) \frac{\partial H}{\partial x} + \alpha \frac{Q}{F^2 g} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{iK^2 - Q^2}{K^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо значення H і Q з (15) в систему (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \frac{\partial(B\Delta H)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{1}{g} \frac{1}{F} \frac{\partial \Delta Q}{\partial t} - \frac{\alpha}{g} \frac{QB}{F^2} \frac{\partial \Delta H}{\partial t} + (1 - \alpha \frac{Q^2 B}{F^3 g}) \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + \alpha \frac{Q}{F^2 g} \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} &= \frac{Q_0^2 (K_0 + K'_0 \Delta H)^2 - (Q_0 + \Delta Q)^2 K_0^2}{K_0^2 (K_0 + K'_0 \Delta H)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Уведемо заміну } s = \frac{B}{F} x; \quad \tau = t \sqrt{\frac{gB}{F}}.$$

У першому рівнянні системи (16) перший доданок домножимо на Q , а другий доданок – на F . У другому рівнянні системи (16) перший і четвертий доданки домножимо на Q , одержимо

$$\begin{aligned} Q \frac{\partial \Delta Q / Q}{\partial x} + F \frac{\partial (B\Delta H / F)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{g} \frac{1}{F} Q \frac{\partial \Delta Q / Q}{\partial t} - \frac{\alpha}{g} \frac{QB}{F^2} \frac{\partial \Delta H}{\partial t} + (1 - \alpha \frac{Q^2 B}{F^3 g}) \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + \alpha \frac{Q^2}{F^2 g} \frac{\partial \Delta Q / Q}{\partial x} &= \\ &= \frac{Q_0^2 (K_0 + K'_0 \Delta H)^2 - (Q_0 + \Delta Q)^2 K_0^2}{K_0^2 (K_0 + K'_0 \Delta H)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Позначимо } u = \frac{\Delta Q}{Q}; \quad h = \frac{B\Delta H}{F}.$$

Тоді система набуде вигляду

$$\sqrt{\frac{Q^2 B}{F^3 g}} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0;$$

$$\sqrt{\frac{Q^2 B}{F^3 g}} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha \sqrt{\frac{Q^2 B}{F^3 g}} \frac{\partial h}{\partial \tau} + (1 - \alpha \frac{Q^2 B}{F^3 g}) \frac{\partial h}{\partial s} + \alpha \frac{Q^2 B}{F^3 g} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2Q^2 K K' \Delta H}{K^2 K^2} \frac{B}{F} \frac{F}{B} - \frac{2Q \Delta Q K^2}{K^2 K^2} \frac{Q}{Q}.$$

Нехай $\lambda = \sqrt{\frac{Q^2 B}{F^3 g}}$; $\mu = \frac{K' F}{B K}$, тоді

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha \lambda \frac{\partial h}{\partial \tau} + (1 - \alpha \lambda^2) \frac{\partial h}{\partial s} + \alpha \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 2i(\mu h - u). \quad (17)$$

У [7] доведено що, система (17) є стійкою, якщо виконується така умова:

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha. \quad (18)$$

При $\alpha = 1$ критерій (18) переходить у критерій Ведерникова – Іваса

$$\frac{1}{\lambda} = \mu - 1. \quad (19)$$

4. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Виконаємо в другому рівнянні системи (14) заміну $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{B}$, отримаємо

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad (20)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{g} \frac{U}{F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{U^2}{C^2 R} = i,$$

де $g = 9,8$ м/с – прискорення сили тяжіння; $c = \text{const}$ – коефіцієнт Шезі; $i = \sin \delta = \text{const}$ – нахил лінії середнього дна; $B = b_- + b_+ = \text{const}$ – ширина вільної поверхні; $R = \text{const}$ – гідравлічний радіус русла; α – відомий у гідравліці коректив середньої швидкості.

Доповнимо ці рівняння початковими

$$U|_{t=0} = u_0(x), \quad F|_{t=0} = f_0(x) \text{ на } [0, L]$$

та крайовими

$$U(t, 0) = 0, \quad F(t, 0) = 0$$

умовами, отримаємо початково-крайову задачу знаходження невідомих U, F .

5. ПРО КОРЕКТИВ ШВИДКОСТІ ПОТОКУ Коефіцієнт α використовують для врахування нерівномірності розподілу швидкостей по живому перерізу потоку.

Значення коефіцієнта в таких межах:

$1 < \alpha < 1,3$, якщо рух рідини нерівномірний;

$1 < \alpha < 6$, якщо рух невстановлений.

У плоскому рівномірному потоці з логарифмічним розподілом усереднених швидкостей величина α визначена за формулою [4, 5]

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\chi^2} \frac{g}{C^2}, \quad \text{де } \chi - \text{ параметр Кармана.}$$

6. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА

Уведемо простори допустимих функцій $H := L^2(\Omega)$, $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = 0\}$. Для побудови варіаційної задачі домножимо перше рівняння задачі (20) на довільну функцію $\varphi \in V$, друге – на $\psi \in V$ і результати проінтегруємо за областю Ω .

Уведемо такі білінійні форми:

$$a(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx;$$

$$b(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx;$$

$$c(u, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx;$$

$$d(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u f \varphi dx,$$

а також лінійний оператор

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} i \varphi dx.$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (20) запишемо так.

Задано

$$u_*, f_* \in H$$

Знайти пару

$$(u, h) \in L^2(0, T; V \times V) \text{ таку, що}$$

$$\begin{cases} a(u, f, \varphi) + a(f, u, \varphi) + b(f', \varphi) = 0; \\ \frac{1}{g} b(u', \psi) + \frac{\alpha}{g} a(u, u, \psi) + \frac{1}{B} c(f, \psi) + \frac{1}{C^2 R} d(u, u, \psi) - \frac{\alpha-1}{g} d(w, f', \psi) = \langle l, \psi \rangle; \\ b(u(0) - u_0, \varphi) = 0, b(f(0) - f_0, \psi) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

7. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Для побудови обчислювальної схеми розв'язку варіаційної задачі виконаємо напівдискретизацію варіаційної задачі в часі. Розділимо відрізок часу $[0, T]$ на $N_T + 1$ однакові (хоча це необов'язково) частини $[t_j, t_{j+1}]$ завдовжки $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, \dots, N_T$. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ шукаємо розв'язки задачі (21).

Розв'язки $u(x, t), f(x, t) \in L^2(0, T; V)$ цієї задачі апроксимуємо поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{\Delta}(x, t) = \{1 - \omega(t)\} u^j(x) + \omega(t) u^{j+1}(x); \\ f_{\Delta}(x, t) = \{1 - \omega(t)\} f^j(x) + \omega(t) f^{j+1}(x); \\ t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, 1, \dots, N_T - 1, \omega(t_j, t) = \frac{t - t_j}{\Delta t} \end{cases} \quad (22)$$

з невідомими функціями $u^j(x), f^j(x) \in V_h$.

Для функціонала $l(x, t) \in V_h^1$ задачі (21) будемо використовувати апроксимації вигляду

$$l_{\Delta}(x, t) = l_{j+1/2} = l(t_{j+1/2}, x). \quad (23)$$

8. ПРОЕКЦІЙНІ РІВНЯННЯ

У просторі $L^2(t_j, t_{j+1})$ зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) виберемо функції $\xi(t), \eta(t)$ такі, що

$$(\xi, 1) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(\tau) d\tau \neq 0, (\eta, 1) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta(\tau) d\tau \neq 0$$

і будемо домагатися, щоб нев'язка підстановки апроксимацій (22), (23) у варіаційне рівняння задачі (21) була ортогональною до функцій $\xi(t), \eta(t)$ відносно скалярного добутку на проміжку (t_j, t_{j+1}) .

Тоді

$$\begin{cases} b(f^{j+1/2}, \varphi) + \Delta t \gamma [a(u^j, f^{j+1/2}, \varphi) + a(u^{j+1/2}, f^j, \varphi) + a(f^{j+1/2}, u^j, \varphi) + a(f^j, u^{j+1/2}, \varphi)] = \\ = -a(u^j, f^j, \varphi) - a(f^j, u^j, \varphi); \\ \frac{1}{g} b(u^{j+1/2}, \psi) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta [a(u^j, u^{j+1/2}, \psi) + a(u^{j+1/2}, u^j, \psi)] + \frac{1}{B} \Delta t \beta c(f^{j+1/2}, \psi) + \\ + \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d(u^j, u^{j+1/2}, \psi) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \langle l_{j+1/2}, \psi \rangle - \frac{\alpha}{g} a(u^j, u^j, \psi) - \frac{1}{B} c(f^j, \psi) - \\ - \frac{1}{C^2 R} d(u^j, u^j, \psi), \end{cases} \quad (24)$$

у яких уведено такі позначення:

$$a(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx;$$

$$b(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx;$$

$$c(u, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx;$$

$$d(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u f \varphi dx;$$

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega} l \varphi dx.$$

Також для скорочення запису введемо такі позначення:

$$u^j = u^j(x), f^j = f^j(x);$$

$$u^{j+1/2} = u^{j+1/2}(x) = \frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\Delta t}; f^{j+1/2} = f^{j+1/2}(x) = \frac{f^{j+1}(x) - f^j(x)}{\Delta t}.$$

З (24) можна визначити $u^{j+1/2}, f^{j+1/2}$. Коефіцієнти рекурентної схеми визначені за формулами

$$\gamma = \frac{(\omega^2, \xi)}{(\xi, 1)}, \beta = \frac{(\omega^2, \eta)}{(\eta, 1)}.$$

9. РЕКУРЕНТНА СХЕМА

Задано

$$\Delta t, \omega(t) = \text{const} > 0, u^j, f^j \in V \times V.$$

Знайти

$$u^{j+1}, f^{j+1} \in V \times V,$$

такі, що:

$$\left\{ \begin{aligned} & b(f^{j+1/2}, \varphi) + \Delta t \gamma [a(u^j, f^{j+1/2}, \varphi) + a(u^{j+1/2}, f^j, \varphi) + a(f^{j+1/2}, u^j, \varphi) + a(f^j, u^{j+1/2}, \varphi)] = \\ & = -a(u^j, f^j, \varphi) - a(f^j, u^j, \varphi); \\ & \frac{1}{g} b(u^{j+1/2}, \psi) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta [a(u^j, u^{j+1/2}, \psi) + a(u^{j+1/2}, u^j, \psi)] + \frac{1}{B} \Delta t \beta c(f^{j+1/2}, \psi) + \\ & + \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d(u^j, u^{j+1/2}, \psi) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \langle l_{j+1/2}, \psi \rangle - \frac{\alpha}{g} a(u^j, u^j, \psi) - \frac{1}{B} c(f^j, \psi) - \\ & - \frac{1}{C^2 R} d(u^j, u^j, \psi); \\ & u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Схема передбачає, що початковий розв'язок (u^0, f^0) визначений початковими умовами.

10. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій V_h з простору V з властивостями $\dim V_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$.

Тоді (u_h, v_h) – напівдискретна апроксимація розв'язку (u, f) .

Виберемо базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ простору апроксимацій V_h . Задачу знаходження розв'язку варіаційної задачі за дискретизацією Гальоркіна формулюють так.

Задано $u_0, f_0 \in V$, знайти пару $(u_h, f_h) \in L^2(0, T; V_h \times V_h)$ таку, що:

$$\left\{ \begin{aligned}
& b(f_h^{j+1/2}, \varphi) + \Delta t \gamma [a(u_h^j, f_h^{j+1/2}, \varphi) + a(u_h^{j+1/2}, f_h^j, \varphi) + a(f_h^{j+1/2}, u_h^j, \varphi) + a(f_h^j, u_h^{j+1/2}, \varphi)] = \\
& = -a(u_h^j, f_h^j, \varphi) - a(f_h^j, u_h^j, \varphi); \\
& \frac{1}{g} b(u_h^{j+1/2}, \psi) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta [a(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi) + a(u_h^{j+1/2}, u_h^j, \psi)] + \frac{1}{B} \Delta t \beta c(f_h^{j+1/2}, \psi) + \\
& + \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi) - \frac{\alpha-1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \langle l_{j+1/2}, \psi \rangle - \frac{\alpha}{g} a(u_h^j, u_h^j, \psi) - \frac{1}{B} c(f_h^j, \psi) - \\
& - \frac{1}{C^2 R} d(u_h^j, u_h^j, \psi); \\
& u_h^{j+1} = u_h^j + \Delta t u_h^{j+1/2}, f_h^{j+1} = f_h^j + \Delta t f_h^{j+1/2}.
\end{aligned} \right. \quad (26)$$

Апроксимація Гальоркіна u_h та f_h однозначно визначена такими розвиненнями:

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^N U_i^j \varphi_i(x), f_h^j(x) = \sum_{i=1}^N F_i^j \varphi_i(x) \quad (27)$$

за функціями базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ і невідомими коефіцієнтами $U = \{U_i\}_{i=1}^N, F = \{F_i\}_{i=1}^N$.

З використанням матричних позначень рекурентна схема (25) допускає еквівалентне зображення.

Задано

$$\Delta t, \omega(t) = \text{const} > 0,$$

$$u^j, f^j \in \mathbb{R}^n.$$

Знайти

$$u^{j+1}, f^{j+1} \in \mathbb{R}^n,$$

такі, що:

$$\left\{ \begin{aligned}
& [B1 + \Delta t \gamma A1(u^j) + \Delta t \gamma A2(u^j)] f^{j+1/2} + [\Delta t \gamma A3(f^j) + \Delta t \gamma A4(f^j)] u^{j+1/2} = \\
& = -AP1(u^j, f^j) - AP2(f^j, u^j); \\
& \left[\frac{1}{B} \Delta t \beta C + \frac{\alpha-1}{g} D2(w^j) \right] f^{j+1/2} + \left[\frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta (A5(u^j) + A6(u^j)) + \frac{1}{C^2 R} 2 \Delta t \beta D1(u^j) \right] u^{j+1/2} = \\
& = L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j); \\
& u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}.
\end{aligned} \right. \quad (28)$$

З накладанням матриць отримаємо такий вигляд рекурентної схеми.

Задано

$$\Delta t, \gamma, \beta = \text{const} > 0;$$

$$u^j, f^j \in \mathbb{R}^n.$$

Знайти

$$u^{j+1}, f^{j+1} \in \mathbb{R}^n,$$

такі, що:

$$\begin{pmatrix} B1 + \Delta t \gamma A1(u^j) + \Delta t \gamma A2(u^j) & \Delta t \gamma A3(f^j) + \Delta t \gamma A4(f^j) \\ \frac{1}{B} \Delta t \beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j) & \frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta (A5(u^j) + A6(u^j)) + \frac{1}{C^2 R} 2 \Delta t \beta D1(u^j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{j+1/2} \\ u^{j+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -AP1(u^j, f^j) - AP2(f^j, u^j) \\ L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j) \end{pmatrix};$$

$$u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}.$$

11. КУСКОВО-ЛІНІЙНІ АПРОКСИМАЦІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для розв'язування задачі напівдискретизації Гальоркіна на практиці широко використовують кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів.

Відрізок $[0, L]$ поділимо за допомогою послідовності рівновіддалених вузлів: $x_i = i \cdot h, i = 0, \dots, N, h = \frac{L}{N}$ на N скінченних відрізків $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, N-1$.

Неперервні кусково-визначені базисні функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ з простору V_h вибираємо у вигляді лінійних поліномів

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_i \leq x \leq L. \end{cases}$$

Тоді на кожному відрізку напівдискретну апроксимацію наведемо у вигляді

$$u_h^k(x) = \sum_{j=i}^{i+1} U^k \varphi_j(x),$$

$$f_h^k(x) = \sum_{j=i}^{i+1} F^k \varphi_j(x), \quad \forall h > 0, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],$$

де

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j; \end{cases}$$

$$u_h^k(x_i) = U_i^k, f_h^k(x_i) = F_i^k, i = 0, 1, \dots, N - \text{наближені розв'язки у вузлах сітки.}$$

Рівняння на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{j=i}^{i+1} \left[[b1_{ij} + \Delta t \gamma a1_{ij}(u^k) + \Delta t \gamma a2_{ij}(u^k)] F^{k+1/2} + [\Delta t \gamma a3_{ij}(f^k) + \Delta t \gamma a4_{ij}(f^k)] U^{k+1/2} \right] = \right. \\
& = -ap1_i(u^k, f^k) - ap2_i(f^k, u^k) \\
& \left. \left[\sum_{j=i}^{i+1} \left[\left[\frac{1}{B} \Delta t \beta c_{ij} + \frac{\alpha-1}{g} d2_{ij}(w^k) \right] F^{k+1/2} + \left[\frac{1}{g} b2_{ij} + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta (a5_{ij}(u^k) + a6_{ij}(u^k)) + \frac{1}{C^2 R} 2 \Delta t \beta d1_{ij}(u^k) \right] U^{k+1/2} \right] = \right. \\
& = l_i^{k+1/2} - \frac{\alpha}{g} ap3_i(u^k, u^k) - \frac{1}{B} cp_i(f^k) - \frac{1}{C^2 R} dp_i(u^k, u^k)
\end{aligned}$$

де

$$B1 = \{b1_{ij}\}_{i,j}^N = \{b(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A1(u_h^k) = \{a1_{ij}(u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(u_h^k, \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) \frac{\partial(\varphi_i(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A2(u_h^k) = \{a2_{ij}(u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(\varphi_i, u_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial(u_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A3(u_h^k) = \{a3_{ij}(f_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(\varphi_i, f_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial(f_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A4(f_h^k) = \{a4_{ij}(f_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(f_h^k, \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L f_h^k(x) \frac{\partial(\varphi_i(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$AP1(u_h^k, f_h^k) = \{ap1_i(u_h^k, f_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(u_h^k, f_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) \frac{\partial(f_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$AP2(f_h^k, u_h^k) = \{ap2_i(f_h^k, u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(f_h^k, u_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L f_h^k(x) \frac{\partial(u_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j}^N = \{c(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$B2 = \{b2_{ij}\}_{i,j}^N = \{b(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A5(u_h^k) = \{a5_{ij}(u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(u_h^k, \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) \frac{\partial(\varphi_i(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$A6(u_h^k) = \{a6_{ij}(u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(\varphi_i, u_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial(u_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ;$$

$$\begin{aligned}
D1(u_h^k) &= \{d_{ij}(u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{d(u_h^k, \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ; \\
D2(w_h^k) &= \{d_{ij}(w_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{d(w_h^k, \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L w_h^k(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ; \\
AP3(u_h^k, u_h^k) &= \{ap3_i(u_h^k, u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{a(u_h^k, u_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) \frac{\partial(u_h^k(x))}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ; \\
CP(f_h^k) &= \{cp_i\}_{i,j=1}^N = \{c(f_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L \frac{\partial f_h^k(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N ; \\
DP(u_h^k, u_h^k) &= \{dp_i(u_h^k, u_h^k)\}_{i,j=1}^N = \{d(u_h^k, u_h^k, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L u_h^k(x) u_h^k(x) \varphi_j(x) dx \right\}_{i,j=1}^N .
\end{aligned}$$

Оскільки матриця системи блоково-діагональна, то для розв'язування використаємо метод Холецького. У цій системі значення параметрів γ, β рекурентних рівнянь вибираємо з умов їхньої стійкості та забезпечення бажаної точності.

12. ТЕСТОВІ ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розглянемо приклад з відомим аналітичним розв'язком

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 ; \\
\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial \alpha u}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{(\alpha-1)}{f} u \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u^2}{C^2 R} &= i + G(x, t) ; \\
u|_{t=0} &= -x, \quad f|_{t=0} = x ; \\
u(t, 0) &= 0, \quad f(t, 0) = 0,
\end{aligned}$$

де

$$G(x, t) = \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{x}{g} + \frac{\alpha x}{g} + \frac{2(\alpha-1)}{g} + \frac{(1+t)^4}{B} + \frac{x^2}{C^2 R} \right) - i .$$

Точний аналітичний розв'язок цієї задачі запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u^*(x, t) = -\frac{x}{(1+t)} ; \\ f^*(x, t) = x(1+t)^2 . \end{cases}$$

Цей приклад обчислювали для розбиттів відрізка $x \in [0, 1]$ на 20, 40, 80 скінченних елементів i з кроком $\Delta t = 0.01$. Результати обчислень зображено на рис. 1–8.

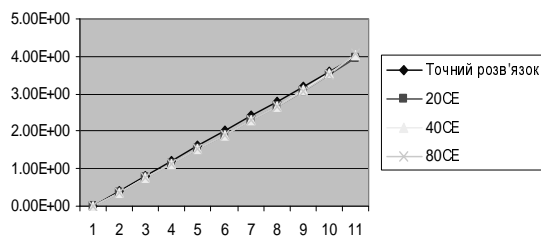


Рис. 1. Площа для різного розбиття по OX

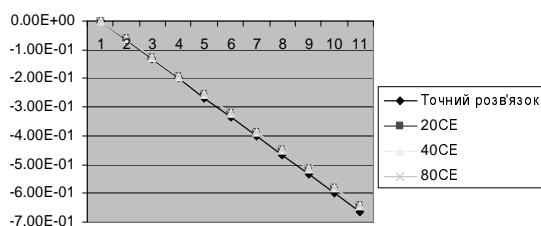


Рис. 2. Швидкість для різного розбиття по OX

Нижче подано графіки зміни площі поперечного перерізу та швидкості в часі.

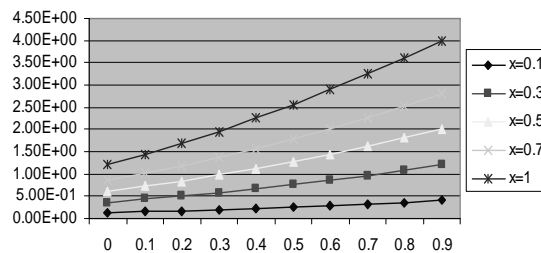


Рис. 3. Площа для різного розбиття по X

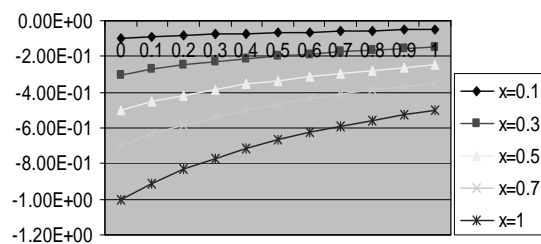


Рис. 4. Швидкість для різного розбиття по X

Далі показано зміну значень відносної й абсолютної похибки для швидкості та площі поперечного перерізу.

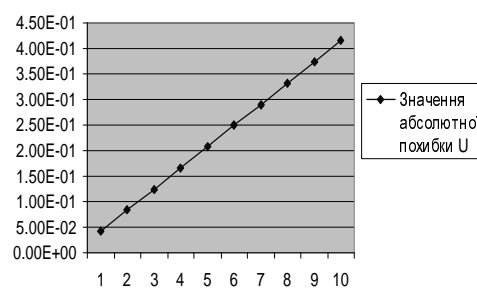


Рис. 5. Значення абсолютної похибки U

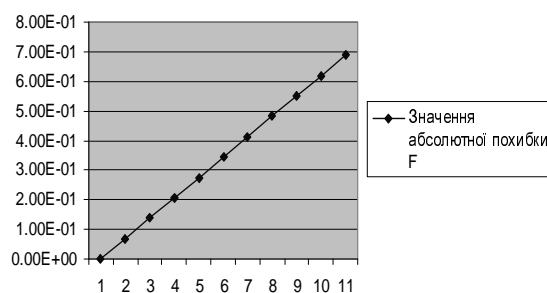


Рис. 6. Значення абсолютної похибки F

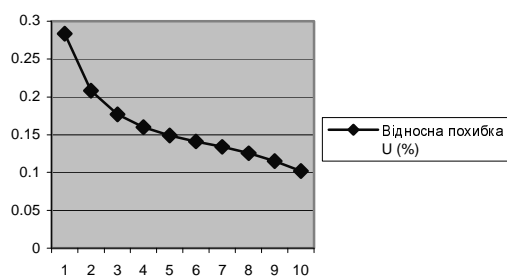


Рис. 7. Відносна похибка U (%)

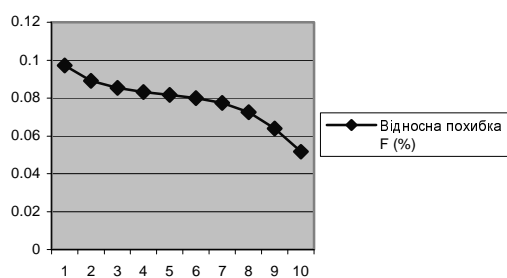


Рис. 8. Відносна похибка F (%)

Норму похибки для функції F , як і для U , обчислювали за такою формулою:

$$\|e_{\Delta t h}\|^2 = \int_0^T \int_0^1 (f_{h\Delta t} - f)^2 dx dt = \sum_{i_i} \int_0^1 \int_0^1 (f_{h\Delta t} - f)^2 dx dt = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 \left(f_{h\Delta t} \left(x, t_{i+\frac{1}{2}} \right) - f \left(x, t_{i+\frac{1}{2}} \right) \right)^2 dx.$$

Порядок збіжності за просторовою змінною знаходили зі співвідношення

$$K = \text{Log}_2 \frac{\|e_{\Delta t h}\|^2 - \|e_{\Delta t \frac{h}{2}}\|^2}{\|e_{\Delta t \frac{h}{2}}\|^2 - \|e_{\Delta t \frac{h}{4}}\|^2}.$$

Отримано порядок збіжності для функції F , який дорівнює 1.925635, аналогічно для функції U – 2.40379. Подібно обчислювали порядки збіжності за часом, для функції F : $K = 5.007565$; для функції U : $K = 4.996095$. Для різних типів річок вибрано такі значення параметра α :

$\alpha = 1$ – рівнинні,

$1 < \alpha \leq 1.07$ – напівгірські,

$1.07 < \alpha < 6$ – гірські річки.

Задано такі значення параметра α : $\alpha = 1; \alpha = 1.05; \alpha = 2$.

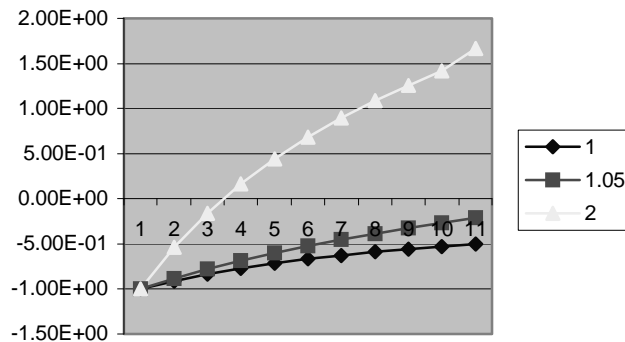


Рис. 9. Значення швидкості при різних параметрах α

Приклад 2. Числові результати порівнювали з результатами лабораторних досліджень, опублікованих у [14].

Оскільки ширина русла b стала і дорівнює 0,838 м, відомі початкова висота h_0 і розхід потоку Q_0 , то за формулою $u_0 = \frac{Q_0}{h_0 b}$ можна знайти початкову швидкість, яка дорівнює 0.378831. Згідно з [15] з формули $R = (C_0 n_0)^6$ отримуємо значення гідравлічного радіуса русла. Підставимо ці дані у програму й отримаємо результати (див. табл.).

Номер за пор.	h_0 , м	R	Нахил дна, $\times 10^{-5}$	Глибина потоку, мм							C_0	n_0
				h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7		
Рівномірний потік $Q_0 = 10$ л/с												
1. Теплов	31,5	0,034	123,90	31,0	28,3	25,0	20,9	18,0	14,9	11,4	63,41	0,009
Програма	31,5	0,034	123,90	31	30,2	24,9	24,2	23,3	22,5	20,2	63,41	0,009
2. Теплов	34,0	0,031	100,20	34,1	31,9	29,0	25,5	22,9	19,9	16,7	62,45	0,009
Програма	34,0	0,031	100,20	34	32,2	28,6	25,1	24,8	23,3	20,2	62,45	0,009
3. Теплов	40,0	0,034	74,81	40,0	38,1	35,9	32,9	30,9	28,5	25,8	57,08	0,010
Програма	40,0	0,034	74,81	39,9	38,1	35,7	33	30,91	28,7	28,1	57,08	0,010
4. Теплов	46,5	0,031	49,50	46,6	45,4	43,5	41,1	40,0	38,1	36,0	56,34	0,010
Програма	46,5	0,031	49,50	46,5	46,4	46,2	45,2	42,2	41	36,2	56,34	0,010
5. Теплов	62,8	0,061	24,12	62,8	61,9	60,9	59,4	58,6	57,5	56,6	52,35	0,012
Програма	62,8	0,061	24,12	62,7	62,5	62,1	61,1	59,7	57,3	56,4	52,35	0,012
6. Теплов	80,8	0,082	12,49	80,8	80,4	79,7	79,0	78,2	77,7	77,0	50,75	0,013
Програма	80,8	0,082	12,49	80,8	80,6	80,3	79,1	78,5	77,68	75,4	50,75	0,013
7. Теплов	99,5	0,075	5,12	99,5	99,2	98,9	98,2	97,9	97,6	97,3	59,09	0,011
Програма	99,5	0,075	5,12	99,4	99,2	99	98,5	97,7	97,4	97,1	59,09	0,011

Наведені результати свідчать про достовірність отриманих даних з програми, хоча збіг результатів приблизний, бо у статті результати одержані під час лабораторних дослідів за ідеальних умов.

13. ВИСНОВКИ

Отже, розглянуто задачу математичного моделювання руслового стоку рідини з поверхні водозбору. Виведено систему рівнянь, які описують русловий стік, із загальних рівнянь Нав'є – Стокса. Сформульовано умови зміни параметра для різних видів потоків у річках. Досліджено умови стійкості встановленого потоку. Сформульовано початково-крайову задачу руху нестисливої рідини в руслі з вертикальною площиною симетрії та варіаційну задачу, яку розв'язують методом скінченних елементів. Виконано напівдискретизацію варіаційної задачі в часі та дискретизацію Гальоркіна за просторовою змінною. В середовищі візуального програмування Delphi розроблено програму з графічним інтерфейсом для реалізації відповідних рекурентних схем задачі.

Проаналізовано отримані результати. Обчислено абсолютні і відносні похибки швидкості та глибини руслового потоку, проаналізовано норму похибки результуючих даних. Знайдено порядок збіжності числової схеми апроксимації розв'язку за просторовою змінною і часом. Виконано порівняння числових результатів з точним аналітичним розв'язком задачі. Апробовано поведінку розв'язків задачі для різних типів рельєфу дна русла. Зроблено аналіз достовірності результатів програми, порівняно їх з результатами лабораторних досліджень російських вчених.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бураков Д.А., Кареева Е.Д., Шайдунов В.В. Математическое моделирование стока: теоретические основы, современное состояние, перспективы // Вестн. КрасГУ. – 2006. – 19 с.
2. Венгерський П.С., Коковська Я.В. Математичне моделювання руслового стоку вологи // Dynamical System Modeling and Stability Investigation: –“DSMSI-2007”: Intertational Conferece: Theses of conference reports. May 22-25. Kyiv, 2007. P. 174.
3. Венгерський П.С., Коковська Я.В. Чисельне моделювання руслового стоку вологи // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XIV Всеукр. наук. конф.: Тези доп. Львів. 2007. С. 54 – 55.
4. Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование процессов формирования стока. Л., 1988.
5. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. Л., 1979.
6. Картелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем с примерами из электроэнергетики. М., 1976.
7. Картелишвили Н.А. Неустановившиеся открытые потоки. Л., 1968.
8. Коковська Я.В. Чисельне моделювання процесів руслового стоку вологи // X Всеукр. (V Міжнар.) студ. наук. конф. з прикл. математики та інформатики: Тези доп. Львів, 2007. – С. 90 – 91.
9. Коковська Я.В. Врахування нерівномірності розподілу швидкостей при моделюванні руслового стоку вологи // XI Всеукр. (VI Міжнар.) студ. наук. конф. з прикл. математики та інформатики: Тези доп. Львів, 2008. С. 130 – 131.
10. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. Л., 1980.
11. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, 1999.
12. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів., 2004.
13. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991.
14. <http://bedload.boom.ru/index.html>: Теплов В.И. Расчет водопропускной способности призматического прямоугольного русла с отрицательным уклоном дна. Государственный гидрологический институт СП., Россия.
15. <http://bedload.boom.ru/MyPapers/27.htm>: Кондратьева А.Н. О физической сущности формулы Шези. 1997.

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ РУСЛОВОГО СТОКА ЖИДКОСТИ

П. Венгерский, Я. Коковская

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

Рассмотрено моделирование течения несжимаемой жидкости в псевдопризматическом русле с вертикальной плоскостью симметрии. Предполагаем что глубина потока достаточно мала по сравнению с радиусом кривизны линии среднего дна. Такое движение описывается системой уравнений

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t} \right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R}, \quad \frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Система уравнений (1) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha.$$

Было введено и проанализировано значение корректива средней скорости для разных типов рек. Сформулировано начально-краевую задачу для нахождения неизвестных U , F с такими начальными $U|_{t=0} = u_0(x)$, $F|_{t=0} = f_0(x)$ на $[0, L]$ и краевыми $U(t, 0) = 0$, $F(t, 0) = 0$ условиями. Для решения на ее основе вариационной задачи использован метод конечных элементов. Результаты протестированы на примере с аналитическим решением, а также выполнено сравнение результатов вычислений с лабораторными исследованиями других авторов.

Ключевые слова: уравнения движения жидкости, скорость потока, сечение русла, напорное движение, радиус кривизны средней линии дна, проекционные уравнения, схема Галеркина, метод конечных элементов, одношаговая рекуррентная схема, линеаризация.

ONE OF APPROACHES OF MODELING OF PROCESSES OF RIVER-BED FLOW OF FLUID

P. Vengersky, Y. Kokovska

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

In the given paper the approach is considered to the modeling of flow of incompressible fluid in a pseudo prismatic river-bed with the vertical plane of symmetry. Assume that the depth of flow was sufficient compared with the average radius of curvature of the bottom line. Such motion is described by the follow system of equations:

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t} \right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R}, \quad \frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

The system of equations (1) was reduced to system which satisfies next condition

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha.$$

It is entered and the value of corrective of medium speed is analysed for different types of flows in rivers. Initial-boundary value problem for finding the unknown U , F with the initial $U|_{t=0} = u_0(x)$, $F|_{t=0} = f_0(x)$ on $[0, L]$ and the boundary $U(t, 0) = 0$, $F(t, 0) = 0$ conditions was formulated for system (1). The variation problem description which was solved by the finite-elements method is formulated. Results are tested on an example, that has the analytical solution and also congruencies of results of calculations is done with laboratory experimentations of other authors.

Key words: equation of motion of fluid, speed of flow, section of river-bed, pressure motion, radius of curvature of middle line of bottom, projection equation, Galerkin scheme, finite elements method, linearization.

*Стаття надійшла до редколегії 02.09.2009
Прийнята до друку 04.11.2009*