ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія прикл. матем. інформ.
2009. Вип. 15. С. 170–177

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Appl. Math. Inform.
2009. Is. 15. P. 170–177

УДК 532.543

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В ГРУНТІ

П. Венгерський, О. Демкович

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

Для опису процесу фільтрації будується математична модель, яка враховує густину рідини. Наведену модель отримано з використанням основних рівнянь фільтрації. Побудовано варіаційну задачу, яку розв'язували методом скінченних елементів з використанням схеми лінеаризації при дискретизації по часу та схеми Гальоркіна для дискретизації по просторових змінних. Цю модель апробовано на тестових прикладах і проаналізовано похибки апроксимацій.

Ключові слова: основні рівняння фільтрації, напірний рух, густина, тиск, потік рідини, п'єзометричний напір, швидкість фільтрації, схема Гальоркіна, метод скінченних елементів, однокрокова рекурентна схема, лінеаризація.

1. ВСТУП

Важливим питанням для життя та діяльності людини є ефективне використання водних ресурсів планети. Для передбачення ймовірних наслідків використання та управління водними ресурсами треба вивчати та моделювати цикл кругообігу води в природі. Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. Гідрологічні системи складаються з багатьох взаємопов'язаних між собою етапів кругообігу води на планеті. В загальному дослідження цілої такої системи з врахуванням всіх чинників є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджують лише певну частину області, що бере участь в кругообігу води. В розглядуваній області проводять вертикальну декомпозицію області задачі – цю область розбивають на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовують моделі різної розмірності, їхні розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов.

Важливим процесом для дослідження є етап фільтрації [5,6,10], оскільки він вагомо залежить від решти етапів гідрологічної системи, таких як випадання опадів, русловий стік, потік в озерах і водоймах. Також процес фільтрації безпосередньо залежить від діяльності людини (меліорація, будівля гідроспоруд), тому його вивчення дає змогу зрозуміти процес формування ґрунтових вод і передбачувати наслідки діяльності людини.

Моделі для опису фільтрації води в різних шарах ґрунту відрізняються одна від одної забезпеченістю даними, можливістю перевірки на адекватність у реальних умовах.

Для опису процесу фільтрації пропонують два основні підходи: гідравлічний і гідродинамічний [9,10].

При гідравлічному підході в області фільтрації виділяють елементарний об'єм, для якого записують рівняння балансу притоку та відтоку води. Для отримання рівняння, що описує процес фільтрації, використовують граничний перехід, коли виділений об'єм ґрунту прямує до нуля. Отримане рівняння називають рівнянням Буссінеска. За допомогою такого рівняння можна знайти скалярну характеристику потоку фільтрації – п'єзометричний тиск. Для опису часткових видів фільтрації на підставі рівняння Буссінеска будують його спрощені формулювання, які відомі в літературі під назвами рівнянь планової та профільної фільтрації.

Використовуючи гідродинамічний підхід для отримання рівнянь, що описують процес фільтрації, застосовують підхід механіки суцільного середовища до опису руху середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями фільтрації. Невідомі величини, які входять у ці рівняння, є п'єзометричний тиск, швидкість і густина потоку фільтрації.

У цій статті розглянуто модель отриману з використанням основних рівнянь фільтрації. Особливістю цієї моделі є врахування густини фільтруючої рідини, що важливо під час дослідження фільтрації стисливих рідин, а також у разі напірної фільтрації води з великими значеннями тиску.

З огляду на те, що для багатьох задач фільтрації характерна наявність вільної поверхні [9,10,12], наводиться побудова та дискретизація варіаційної задачі фільтрації. Для побудови дискретизованої задачі використовували схему Гальоркіна та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі [14]. Отриману дискретизовану задачу можна розв'язати методом скінченних елементів [11,14], який дає змогу знаходити вигляд змінної області визначення задачі в часі без її перерозбиття на скінченні елементи [12].

Розглянемо основні рівняння, які використовують для побудови математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті.

2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Для побудови математичної моделі використаємо основні рівняння фільтрації:

рівняння збереження енергії [9,10]

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\upsilon+\frac{1}{k}\upsilon+\nabla h=0\,, \tag{2.1}$$

де $h=\dfrac{p}{\rho g}+z$ - п'єзометричний тиск,

та рівняння збереження маси [9,10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)+\nabla.(\rho\upsilon)=0\,. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.1) та (2.2) утворюють систему чотирьох скалярних рівнянь з п'ятьма невідомими $\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,h,\rho$, тому для замикання цієї системи рівнянь їх треба доповнити рівнянням стану рідини. Загальний вигляд рівняння стану виберемо у вигляді (2.3), в якому задається залежність густини рідини фільтрації від тиску

$$\rho=\rho(p)\,. \tag{2.3}$$

Одним з прикладів аналітичного вигляду рівняння стану рідини [9] може бути

$$\rho=\rho_0 e^{\beta\left(p-p_0\right)}, \tag{2.4}$$

де ρ_0, p_0 – деякі початкові значення густини та тиску, відповідно; β - певна задана функція, яка залежить від типу рідини.

Використавши (2.4), виразимо залежність тиску та п'єзометричного напору від густини рідини. Ці залежності мають вигляд (2.5) та (2.6), відповідно

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{2.5}$$

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right) + z\,. \tag{2.6}$$

Виключивши з (2.1) та (2.2), тиск та п'єзометричний тиск приходимо до замкнутої системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{1}{k}\mathbf{v} + f(\rho)\nabla\rho + \vec{i_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad в\ \Omega\times[0,T), \tag{2.7}$$

де

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g}\ln(\frac{\rho}{\rho_0})\right).$$

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо (2.7) в певній області $\Omega \subset R^3$ на проміжку часу $(0;T]$.

У (2.7) шуканими величинами є швидкість $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z)$ та густина $\rho = \rho(x,y,z)$.

Доповнимо (2.7) початковими та крайовими умовами

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^* \\ \rho|_{t=0} = \rho^* \end{bmatrix} \hat{a}\,\Omega\ . \tag{3.1}$$

Крайову умову виберемо у вигляді

$$\rho\mathbf{v}.\mathbf{n} = q^*\ на\ \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega\ . \tag{3.2}$$

В загальному випадку область фільтрації Ω є тривимірною. Прийнявши, що параметри фільтраційного потоку незмінні вздовж горизонтального виміру, будемо розглядати двовимірну область фільтрації $\tilde{\Omega}$, що є вертикальним перерізом області Ω (див. рис.1).

Запишемо математичне формулювання задачі для області $\tilde{\Omega} \subset R^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \frac{1}{k}\mathbf{v} + f(\rho)\nabla\rho + \vec{i_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad в\ \tilde{\Omega}\times[0,T) \tag{3.3}$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g}\ln(\frac{\rho}{\rho_0})\right)\ .$$

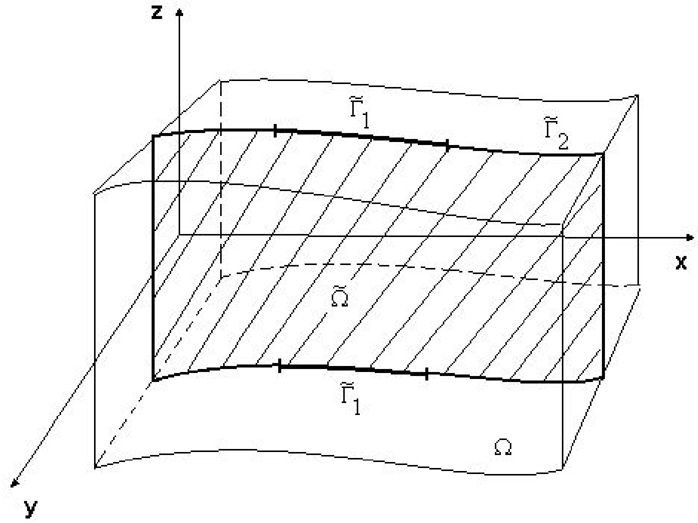

Рис. 1. Область фільтрації Ω

Початкові умови:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^* \\ \rho|_{t=0} = \rho^* \end{bmatrix} \text{ в } \tilde{\Omega}. \tag{3.4}$$

Крайові умови:

$$\rho\,\mathbf{v}.\mathbf{n} = q^* \text{ на } \tilde{\Gamma}_1 \subset \partial\tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 = \partial\tilde{\Omega}. \tag{3.5}$$

4. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Варіаційне формулювання задачі (3.3)–(3.5) запишеться

$$\begin{cases} \text{Задано } \mathbf{v}_0, \rho_0 \in L^2(\tilde{\Omega}), l \in L^2(0,T;V_2'). \\ \text{Знайти} \quad \mathbf{v}(t) \in L^2(0,T;V_1), \rho(t) \in L^2(0,T;V_2) \text{ такі, що} \\ \frac{1}{g}(\mathbf{v}'(t),\varphi) + \frac{1}{k}(\mathbf{v}(t),\varphi) + (\mathbf{i}_2,\varphi) + b(f(\rho),\nabla\rho,\varphi) = 0; \quad \forall\varphi \in V_1 \\ ((\rho n)',\psi) - b_n(\rho;\mathbf{v}(t),\psi) = -< l,\psi >; \quad \forall\psi \in V_2 \\ (\mathbf{v}(0) - \mathbf{v}_0, \phi) = 0, \\ (\rho(0) - \rho_0, \psi) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

де V_2' – спряжений до V_2 простір.

Форми, які входять в (4.1), мають такий вигляд:

$$< l,u >= \int_{\Gamma_1} \left\{q^* u\right\} d\gamma ,$$

$$b(c;\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\tilde{\Omega}} \{c\,\mathbf{u}.\mathbf{v}\} d\tilde{\Omega} ,$$

$$b_n(c;\mathbf{u},v) = b(c;\mathbf{u},\nabla v) - \int_{\Gamma_2} \{c\,\mathbf{u}.\mathbf{v}\, v\} d\gamma ,$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\tilde{\Omega}} \{\mathbf{u}.\mathbf{v}\} d\tilde{\Omega} .$$

5. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

Виберемо послідовність щільно вкладених скінченновимірних просторів $\left\{V_h^1\right\} \subset V_1$ та $\left\{V_h^2\right\} \subset V_2$ таких, що $\dim V_h^i = N(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \infty$, $i = 1,2$. Розкладемо шукані величини за базисом вибраних відповідних скінченновимірних просторів:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\upsilon}_h(t) &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\upsilon}_k(t) C_i(x,y) , \\ \rho_h(t) &= \sum_{k=1}^{N} \rho_k(t) L_i(x,y) , \end{aligned} \tag{5.1}$$

тоді напівдискретизовану варіаційну задачу задачі (4.1) запишемо так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Задано } h > 0,\, \boldsymbol{\upsilon}_0,\, \rho_0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right),\, l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\ \textit{Знайти} \quad \boldsymbol{\upsilon}_h(t) \in L^2\left(0,T;V_h^1\right),\, \rho_h(t) \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \textit{ такі, що} \\ \frac{1}{g}(\boldsymbol{\upsilon}_h{}'(t),\varphi) + \frac{1}{k}(\boldsymbol{\upsilon}_h(t),\varphi) + (\mathbf{i}_2,\varphi) + b(f(\rho_h),\nabla\rho_h,\varphi) = 0; \quad \forall \varphi \in V_1 \\ ((\rho_h n)',\psi) - b_n(\rho_h;\boldsymbol{\upsilon}_h(t),\psi) = -< l,\psi >; \quad \forall \psi \in V_2 \\ \left(\boldsymbol{\upsilon}_h(0) - \boldsymbol{\upsilon}_0,\phi\right) = 0, \\ \left(\rho_h(0) - \rho_0,\psi\right) = 0. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Врахувавши (5.1), очевидно, що розв’язання задачі (4.1) звелось до відшукання коефіцієнтів $\upsilon_h(t),\ \rho_h(t)$ з (5.2).

6. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Розділимо відрізок часу [0,T] на $(N_T + 1)$ рівних частин $[t_j, t_{j+1}],\ j = 0,...,N_T + 1$.

Застосувавши до (5.2) однокрокову рекурентну схему дискретизації в часі, метод побудови проекційного рівняння [14] та знехтувавши нелінійними доданками порядку $O(\Delta t^2)$, перейдемо до дискретизованої рекурентної системи рівнянь.

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Задано параметри } \Delta t>0, \theta>0 \text{ та } h>0,\ \mathbf{\upsilon}_h^0,\ \rho_h^0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right),\ l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\
\text{Знайти } \quad \mathbf{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^1\right),\ \rho_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \text{ такі, що} \\
\Delta t \frac{1}{g} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} (i_m,\varphi) + \frac{1}{k} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \Delta t\theta (i_m,\varphi) + \rho_i^{j+\frac{1}{2}} \Delta t\theta b(f(\rho),L_i,\varphi) = \\
-(\mathbf{i}_2,\varphi) - \frac{1}{k}\upsilon_m^j (i_m,\varphi) - \rho_i^j b(f(\rho),L_i,\varphi); \quad \forall \varphi \in V_1 \\
\rho_i^{j+\frac{1}{2}} (n_m^{j+1} + \theta \Delta t\, n_m^{j+\frac{1}{2}})(L_i L_m,\psi) - \\
\Delta t\theta (\rho_i^{j+\frac{1}{2}} \upsilon_m^j + \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \rho_i^j) b_n (L_i;C_m,\psi) = \\
< l_{j+\frac{1}{2}}, \psi > - \rho_i^j n_m^{j+\frac{1}{2}} (L_i L_m,\psi) + \rho_i^j \upsilon_m^j b_n (L_i;C_m,\psi); \quad \forall \psi \in V_2 \\
\qquad \mathbf{\upsilon}_h^{j+1} = \mathbf{\upsilon}_h^j + \Delta t \mathbf{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}};\ j=0,\ldots,N_T-1; \\
\qquad \rho_h^{j+1} = \rho_h^j + \Delta t \rho_h^{j+\frac{1}{2}};\ j=0,\ldots,N_T-1,
\end{array}\right. \tag{6.1}$$

де

$$\mathbf{\upsilon}_{h\Delta t}(t) = \mathbf{\upsilon}_h^{\,j} + \Delta t \omega\left(t_j,t\right) \mathbf{\upsilon}_h^{\,j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j,t_{j+1}\right],\ j=0,\ldots,N_T,$$

$$\mathbf{\upsilon}_h^{\,j+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{\upsilon}_h^{\,j+1} - \mathbf{\upsilon}_h^{\,j}}{\Delta t},$$

$$\rho_{h\Delta t}(t) = \rho_h^{\,j} + \Delta t \omega\left(t_j,t\right) \rho_h^{\,j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j,t_{j+1}\right],\ j=0,\ldots,N_T,$$

$$\rho_h^{\,j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_h^{\,j+1} - \rho_h^{\,j}}{\Delta t},$$

$$< l_{\Delta t}, v > = < l_{j+\frac{1}{2}}, v > = < l(t_{j+\frac{1}{2}}), v >,\ t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t,\ \forall t \in \left[t_j,t_{j+1}\right].$$

Невідомими в (6.1) виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функцій υ_h, ρ_h в момент часу t_{j+1}, тобто υ_h^{j+1}, ρ_h^{j+1}. Значення υ_h^{j+1}, ρ_h^{j+1} знаходять за допомогою рекурентної формули, стартові значення для якої υ_h^{j+1}, ρ_h^{j+1} ми отримуємо з початкових умов задачі (5.2).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Венгерський П.С., Демкович О.Р.* Чисельне розв'язування задачі руху грунтової води в насиченій зоні.//Восьма Всеукраїнська наукова конференція 25–27 вересня 2001 р. "Сучасні проблеми прикладної математики". Львів, 2001. – С.19.
2. *Венгерський П.С., Демкович О., Трушевський В.М.* Чисельне дослідження математичної моделі руху поверхневої і грунтової вологи // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика". Київ, 2002. – С.25.
3. *Венгерський П.С., Демкович О.Р.* Математатичне моделювання руху грунтової води в насиченій зоні // Дев'ята Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Львів, 2002. – 1 стор. (в друці).
4. *Венгерський П.С., Демкович О.Р.* Використання гідродинамічного підходу для моделювання задач руху рідини в грунті. // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. Львів, 2005. – С.125.
5. *Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И.* Идеализация сложных динамических систем с примерами из електроэнергетики. – М.; 1976.
6. *Корявов П.П.* Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна. //Вод.ресурсы. 1981. № 3 – С. 54–64.
7. *Кучмент Л.С.* Модели процессов формирования речного стока. – Ленинград; 1980.
8. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев; 1991.
9. *Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецький Г.Е., Скопецький В.В.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. – Киев; 1977.
10. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.; 1977.
11. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А.* Метод скінченних елементів. – Львів; 1999.
12. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – Киев; 1991.
13. *Шаманский В.Е.* Численные решения задач фильтрации грунтових вод на ЭЦВМ. – Киев; 1969.
14. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ; 1991.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОЧВУ

П. Венгерский, О. Демкович

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

На основании уравнений фильтрации создана математическая модель процесса распространения сжимаемой жидкости в почве. Построена вариационная задача, проведена дискретизация по времени и пространственной переменой. Для решения дискретизированной задачи использовался метод конечных элементов. Эта модель апробирована на тестовых задачах и проанализированы погрешности аппроксимаций.

Ключевые слова: основные уравнения фильтрации, напорное движение, плотность, давление, поток жидкости, пьезометрический напор, скорость фильтрации, схема Галеркина, метод конечных элементов, одношаговая рекуррентная схема, линеаризация.

FLUID GROUND FILTRATION MATHEMATICAL MODEL CONSTRUCT

P.Vengersky, O. Demkovych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

This work is based on base fluid filtration equations. It has constructed mathematical model with that fluid density involved. There are offered variation problem and discrete problem, which was solved by finite elements method. This model was tested by experimental exercises. It has analyzed error of approximation.

Key words: base fluid filtration equation, density, pressure, fluid flow, filtration, finite elements method, linearization, filtration rate.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.2009
Прийнята до друку 04.11.2009