ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Inform.*
2009. Вип. 15. С. 117–125 *2009. Is. 15. P. 117–125*

УДК 517.948

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ТИПУ ХОРД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

С. Шахно, С. Граб, Г. Ярмола

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Запропоновано однокрокову та двокрокову модифікації методу хорд з використанням апроксимації похідної Фреше поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність однокрокового методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Знайдено умови та швидкість збіжності цього методу, виявлено область єдиності розв'язку задачі. Проведено порівняння запропонованих методів на тестових прикладах.

Ключові слова: нелінійне рівняння, метод типу хорд, порядок збіжності.

1. ВСТУП

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$F(x) = 0\,, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій відкритій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Базовим методом для розв'язування (1) є класичний метод Ньютона, який має квадратичну швидкість збіжності за виконання умов Ліпшиця для похідної Фреше чи обмеженості за нормою другої похідної за Фреше. Доброю альтернативою до методу Ньютона для розв'язування (1) є метод хорд, який не вимагає в обчислювальній формулі аналітично заданих похідних. Він набуває вигляду

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(x_n),\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{2}$$

де обмежений лінійний оператор $F(x, y)$ називають поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x, y, якщо справджується рівність

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y)\,.$$

Збіжність класичного методу хорд (2) вивчало багато авторів [4-6, 8, 10]. Пізніше були запропоновані методи типу хорд, типу Стеффенсена, які мають вільний числовий параметр [7, 9]. Вибором цього параметра авторам вдалося показати, що швидкість збіжності ітераційної послідовності має порядок $1+p$, де $0 < p \le 1$. Якщо параметр методу не прямує до нуля, то доведено тільки лінійну збіжність. Крім того, при дослідженні збіжності накладаються умови на похідні від оператора F у потрібній області, хоч в ітераційній формулі фігурують поділені різниці. У цій праці ми пропонуємо ширший, двопараметричний клас методів типу хорд

$$x_{n+1} = x_n - F(u_n, v_n)^{-1} F(x_n),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{3}$$

де $u_n = x_n + a_n(x_{n-1} - x_n)$, $v_n = x_n + b_n(x_{n-1} - x_n)$, $a_n \in [-1;1]$, $b_n \in [0;1]$. Прийнявши $a_n = b_n = 0$, отримаємо класичний метод Ньютона, прийнявши $a_n = 0$, $b_n = 1$, матимемо метод хорд (2), за $a_n = -1$, $b_n = 1$ – метод лінійної інтерполяції Курчатова

[3], і, нарешті, за $a_n = 0$, $b_n \in [0;1]$ одержимо метод типу хорд [9]. Як бачимо, запропонований метод (3) містить методи Ньютона та Курчатова, для яких доведена квадратична збіжність, і методи типу хорд з дещо нижчою збіжністю. Дослідження в рамках одного методу дає змогу порівняти радіуси збіжності окремих відомих методів за однакових умов, накладених на нелінійний оператор.

У праці [18] введено узагальнені умови Ліпшиця для похідної Фреше, де замість сталої Ліпшиця використано додатну інтегровну функцію, і за цих умов досліджено метод Ньютона. Ми в [6] подібні умови ввели для поділених різниць і за таких умов провели дослідження методу хорд.

У цій праці за таких самих умов досліджено збіжність методу типу хорд (3). Показано надлінійну швидкість збіжності ітераційного процесу (з порядком $(1+\sqrt{5})/2$) для постійних параметрів, для незростаючої послідовності $\{b_n\}$ і постійного a_n, а при певному виборі параметрів одержимо і квадратичну збіжність. Зрештою, деякі застосування і числові експерименти показують реальну збіжність методів типу хорд.

Стаття побудована так. У розділі 2 зроблено аналіз збіжності методу (3) та єдиності розв'язку. У розділі 3 запропоновано двокроковий різницевий метод, а у розділі 4 наведено результати чисельного експерименту.

2. ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ (3)

Умова Ліпшиця в області $D \subset R^n$ для поділених різниць першого порядку має вигляд

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le L(\|x-u\|+\|y-v\|), \tag{4}$$

де $x, y, u, v \in D$, L – константа Ліпшиця. Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, але може бути і додатною інтегровною функцією. У цьому випадку умова (4) отримає таке подання [6]:

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz\,. \tag{5}$$

Тут $x, y, u, v \in D$. Умову (5) називатимемо узагальненою умовою Ліпшиця з L в середньому (усередненим L).

Лема 1. [6] Припустимо, що F має поділені різниці в $B(x_*,r)$, існує $F'(x_*)$ і вона оборотна, $F'(x_*)^{-1}F(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця з L в середньому

$$\left\|F'(x_*)^{-1}F(x,y)-I\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz \quad \forall\, x,\, y \in B(x_*,r),$$

де L – додатна інтегровна функція, $\rho(x)=\|x-x_*\|$. Нехай r задовольняє умову

$$\int_0^{2r} L(z)dz \le 1.$$

Тоді $F(x,y)$ оборотна в кулі $B(x_*,r)$ і

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x_*)\right\| \le \left(1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz\right)^{-1}.$$

Теорема 2. Нехай F – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:

1) рівняння (1) має розв'язок x_* в кулі $B(x_*,r)=\{x\in D: \|x-x_*\|<r\}$, існує похідна за Фреше $F'(x_*)$ і вона оборотна;

2) в кулі $B(x_*,r)$ функція $F(x)$ має поділені різниці першого порядку $F(x,y)$, які задовольняють умову Ліпшиця з усередненим L:

$$\left\|F'(x_*)^{-1}F(x,y)-I\right\|\le\int_0^{\|x-x_*\|+\|y-x_*\|}L(z)dz, \tag{6}$$

де $x,\ y\in B(x_*,r)$ і L – неспадна;

3) нехай $r>0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)r}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)r}L(z)dz}\le 1. \tag{7}$$

Тоді послідовність (3) збігається для всіх $x_{-1},\ x_0\in B(x_*,r)$ і

$$\|x_{n+1}-x_*\|\le q_1\|x_{n-1}-x_*\|\|x_n-x_*\|, \tag{8}$$

де

$$\rho_{max}=\max\{\rho(x_{-1}),\rho(x_0)\},$$

$$q_1=\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)\rho_{\max}}L(z)dz}{\left(1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)\rho_{\max}}L(z)dz\right)\rho_{\max}}.$$

Доведення. Доведення проведемо для фіксованих $a_n=a_0$ і незростаючої послідовності $\{b_n\}$. Виберемо довільно $x_{-1},x_0\in B(x_*,r)$, де r задовольняє (7), і покажемо, що $q=\dfrac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}$ буде менше за 1. Справді, з монотонності L отримаємо

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}-\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\right)L(z)dz&=\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2}+\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)L(z)dz\ge\\ &\ge L(t_1)\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2}+\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)dz=\\ &=L(t_1)\left(\frac{t_2-t_1}{t_2}+t_1\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\right)=0\end{aligned} \tag{9}$$

для $0<t_1<t_2$. Тобто, $\frac{1}{t}\int_0^t L(z)dz$ є неспадною стосовно t. Отже, ми маємо

$$q=\frac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}\times$$

$$\times\frac{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}\le$$

$$\le\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)r}L(z)dz}{(1+2|a_0|)r\left(1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)r}L(z)dz\right)}\times$$

$$\times(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})\le$$

$$\le\frac{(1+|a_0|-b_0)\|x_0-x_*\|+(|a_0|+b_0)\|x_{-1}-x_*\|}{(1+2|a_0|)r}<1.$$

Якщо $x_n\in B(x_*,r)$, то згідно з (3) одержуємо

$$x_{n+1}-x_*=x_n-x_*-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n)=-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_*,x_*)$$
$$\times F(x_*,x_*)^{-1}[F(x_n,x_*)-F(u_n,v_n)](x_n-x_*).$$

Тоді згідно з лемою 1 і умовою (6) отримаємо

$$\|x_{n+1}-x_*\|=\|x_n-x_*-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n)\|\le$$

$$\le\|F(u_n,v_n)^{-1}F(x_*,x_*)\|\|F(x_*,x_*)^{-1}[F(x_n,x_*)-F(u_n,v_n)](x_n-x_*)\|\le$$

$$\le\frac{\int_0^{\|u_n-x_n\|+\|v_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\int_0^{\|u_n-x_*\|+\|v_n-x_*\|}L(z)dz}\rho(x_n)=$$

$$=\frac{\int_0^{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_n-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}\rho(x_n).$$

Прийнявши $n=0$, отримаємо

$$\|x_1-x_*\|\le q\|x_0-x_*\|<r.$$

Тобто, $x_1\in B(x_*,r)$. Звідси випливає, що (3) можна продовжити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією всі $\{x_n\}_{n\ge0}$ належать $B(x_*,r)$ і $\rho(x_n)$ монотонно спадає. Далі для всіх $n=0,\ 1,\ldots$ маємо

$$\|x_{n+1}-x_*\|\le\frac{\int_0^{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_n-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}\rho(x_n)\times$$

$$\times\frac{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}\le$$

$$\le\frac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_n)\rho(x_0)+(|a_0|+b_n)\rho(x_{-1})}L(z)dz}\rho(x_n)\times$$

$$\times\frac{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}\le$$

$$\le \frac{\int_0^{(1+2|a_0|)\rho_{max}} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)\rho_{max}} L(z)dz} \frac{(1+2\,|\,a_n\,|)}{(1+2\,|\,a_0\,|)\rho_{max}} \rho(x_{n-1})\rho(x_n) = \tag{10}$$
$$= q_1 \|x_{n-1}-x_*\| \|x_n - x_*\|.$$

Отож, справджується нерівність (8).□

Наслідок 3. Порядок збіжності ітераційного процесу (3) дорівнює $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Зауваження. Вибравши $a_n = 0$ та $b_n = O(\| x_n - x_* \|)$, можна довести квадратичну збіжність процесу (3). Справді,

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le \frac{\int_0^{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})} L(z)dz} \rho(x_n)$$
$$\times \frac{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})}{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})}$$
$$\le \frac{\int_0^{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{2\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} L(z)dz} \rho(x_n) \tag{11}$$
$$\times \frac{(1-b_n+O(1)\rho(x_{n-1}))\rho(x_n)}{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})}$$
$$\le \frac{(1-b_n+O(1)\rho(x_{n-1}))}{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} q \|x_n - x_*\|^2 .$$

Наступна теорема визначає область, в якій розв’язок рівняння (1) єдиний.

Теорема 4. Нехай $F(x_*)=0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$, F має поділені різниці $F(x,x_*)$ в $B(x_*,r)$, які задовольняють радіальну умову Ліпшиця з L у середньому

$$\left\|F'(x_*)^{-1}F(x,x_*)-I\right\| \le \int_0^{\rho(x)} L(z)dz,\ \forall\ x\in B(x_*,r), \tag{12}$$

де $\rho(x)=\|x-x_*\|$ і L – додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє $\int_0^r L(z)dz \le 1.$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв’язок x_* в $B(x_*,r)$.

Доведення. Припустимо, що $x_{**}\in B(x_*,r)$, $x_{**}\ne x_*$, також розв’язок рівняння (1). Тоді $F'(x_*)^{-1}F(x_{**})=0$. Отже,

$$x_{**}-x_* = x_{**}-x_* - F'(x_*)^{-1}F(x_{**}) =$$
$$= -F'(x_*)^{-1}\left[F(x_{**})-F(x_*)-F'(x_*)(x_{**}-x_*)\right] =$$
$$= -F'(x_*)^{-1}\left[F(x_{**},x_*)-F(x_*,x_*)\right](x_{**}-x_*) =$$

$$= -\left[F'\left(x_*\right)^{-1} F\left(x_{**}, x_*\right) - I \right] \left(x_{**} - x_*\right).$$

Тоді, за умови (12), отримаємо

$$\left\| x_{**} - x_* \right\| \le \int_0^{\rho(x_{**})} L(z)\, dz \left\| x_{**} - x_* \right\| < \int_0^r L(z)\, dz \left\| x_{**} - x_* \right\| \le \left\| x_{**} - x_* \right\|,$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, $x_{**} = x_*$. Теорему 4 доведено. □

При вивченні методу типу хорд традиційними є припущення, що поділені різниці першого порядку задовольняють умову Ліпшиця. Вважаючи, що L є сталою, ми отримаємо з теорем 2 та 4 такі наслідки.

Наслідок 5. Нехай $F\left(x_*\right) = 0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$, F має поділені різниці, які задовольняють центральну умову Ліпшиця

$$\left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_*, x_*) - F(x, y) \right) \right\| \le L \left(\left\| x - x_* \right\| + \left\| y - x_* \right\| \right) \tag{13}$$

$\forall\, x,\, y \in B(x_*, r)$, де L – додатне число, $r = \dfrac{1}{\left(3 + 3|a_0| - a_0\right) L}$. Тоді метод типу хорд (3) збігається для всіх x_0, $x_{-1} \in B(x_*, r)$ і виконується (8), де

$$q = \frac{\left(1 + 2|a_0|\right) \rho_{\max} L}{1 - \left(2 - a_0 + |a_0|\right) \rho_{\max} L}.$$

Зауважимо, що для класичного методу хорд $\left(a_0 = 0,\ b_0 = 1\right)$ отримаємо оцінку радіуса $r = \dfrac{1}{3L}$, що збігається з оцінкою з [5, 6, 8]. Такий самий радіус збіжності і в методу Ньютона [13] $\left(a_0 = 0,\ b_0 = 0\right)$, враховуючи співвідношення для похідних $\left\| F'(x_*)^{-1} \left(F'(x_*) - F'(x) \right) \right\| \le 2L \left\| x - x_* \right\|$, яке отримуємо з (13), прийнявши $x = y$. Для методу Курчатова $\left(a_0 = -1,\ b_0 = 1\right)$ радіус збіжності менший і дорівнює $r = \dfrac{1}{7L}$.

Наслідок 6. Припустимо, що $F\left(x_*\right) = 0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$, F має поділені різниці $F\left(x, x_*\right)$ в $B(x_*, r)$, які задовольняють радіальну умову Ліпшиця

$$\left\| F'(x_*)^{-1} F(x, x_*) - I \right\| \le L \left\| x - x_* \right\|,$$

де L – додатне число і $r = \dfrac{1}{L}$. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок x_* у відкритій кулі $B(x_*, r)$.

3. ДВОКРОКОВИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД

Розглянемо двокрокову модифікацію методу типу хорд

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - F(u_n, v_n)^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - F(u_n, v_n)^{-1} F(x_{n+1}), n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{14}$$

де $u_n = x_n + a_n (y_n - x_n)$, $v_n = x_n + b_n (y_n - x_n)$, $a_n \in [-1; 1]$, $b_n \in [0; 1]$. У (14) на одній ітерації треба один раз обчислювати матрицю поділених різниць, як і в методі (3), розв'язувати дві системи лінійних рівнянь, але з однаковою матрицею. Враховуючи, що у цьому випадку прямий хід методу Гауса (чи LU-розклад) виконується один раз, то кількість обчислень на ітерації зростає несуттєво.

Алгоритм (14) також містить окремі деякі відомі методи, які досліджували окремо. Прийнявши $a_n = 1,\ b_n = -1$, маємо двокроковий варіант методу Курчатова [3, 14]. Зауважимо, О.Ваарманн [17] розглядав дещо інший двокроковий варіант методу Курчатова. При $a_n = 0,5,\ b_n = 0,5$ одержимо метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, досліджений багатьма авторами [1, 11, 16, 19, 20], а при $a_n = 0,\ b_n = 1$ – його різницевий аналог з таким самим порядком збіжності (див. [2, 15]). Не розглядаючи питання теоретичного обґрунтування методу, дослідимо його на тестових задачах, виявимо залежність швидкості збіжності (кількості ітерацій) від числових параметрів та порівняємо з однокроковим методом (3).

4. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для чисельного дослідження ми використали тестові приклади з [12].

Приклад 1. Розширена погано масштабована функція Пауелла

$$f_k = 10000 x_k x_{k+1} - 1, \qquad \mathrm{mod}(k,2) = 1,$$
$$f_k = \exp(-x_{k-1}) - \exp(-x_k) - 1.0001, \quad \mathrm{mod}(k,2) = 0,$$
$$\bar{x}_k = 0, \quad \mathrm{mod}(k,2) = 1,$$
$$\bar{x}_k = 1, \quad \mathrm{mod}(k,2) = 0.$$

Приклад 2. Тригонометрично-експоненціальна функція

$$f_k = 3x_k^3 + 2x_{k+1} - 5 + \sin(x_k - x_{k+1})\sin(x_k + x_{k+1}), \qquad k = 1,$$
$$f_k = 3x_k^3 + 2x_{k+1} - 5 + \sin(x_k - x_{k+1})\sin(x_k + x_{k+1}) +$$
$$+ 4x_k - x_{k-1}\exp(x_{k-1} - x_k) - 3, \qquad 1 < k < m,$$
$$f_k = 4x_k - x_{k-1}\exp(x_{k-1} - x_k) - 3, \qquad k = m,$$
$$\bar{x}_k = 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Приклад 3. Дискретизована крайова задача

$$h = 1/(m+1)$$
$$f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k+1}, \qquad k = 1,$$
$$f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k-1} - x_{k+1}, \quad 1 < k < m,$$
$$f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k-1}, \qquad k = m,$$
$$\bar{x}_k = kh(kh-1), \quad k = \overline{1,m}.$$

Для зручності подамо відомі методи у таблицях 1, 2, а потім у таких самих таблицях наведемо результати обчислень.

Таблиця 1

Однокроковий метод

$b \backslash a$	**-1**	**-0.5**	**0**	**0.5**	**1**
-1					м-д Курчатова
-0.5					
0			м-д Ньютона		м-д хорд
0.5					
1	м-д Курчатова		м-д хорд		

Таблиця 2

Двокроковий метод

$b \backslash a$	**-1**	**-0.5**	**0**	**0.5**	**1**
-1					мод. м-д Курчатова
-0.5					
0					різн. м-д $1+\sqrt{2}$
0.5				м-д $1+\sqrt{2}$	
1	мод. м-д Курчатова		різн. м-д $1+\sqrt{2}$		

Зупинка обчислювального процесу відбувалася при виконанні умов $\left\|x_{n+1}-x_n\right\|_\infty \le \varepsilon$ і $\left\|F\left(x_{n+1}\right)\right\|_\infty \le \varepsilon$. Також умова виходу з ітераційного процесу містила обмеження на кількість ітерацій (для передбачення розбіжності методу). Програма була реалізована в середовищі Delphi. Обчислення проводили при різних початкових наближеннях:

1) $x_0 = x_0 \cdot d,\ d = 1,\ 10,\ 100$;
2) $x_{-1} = y_0 = x_0 - 10^r,\ r = -2,\ -4,\ -8$

та при різних значеннях точності ε: $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-15}$.

При такому виборі x_{-1} та y_0 кількість ітерацій суттєво не змінюється, проте зміна x_0 приводить до збільшення кількості ітерацій, а іноді й до розбіжності методу. Отримані результати показали, що розмірність задачі на кількість ітерацій суттєво не впливає.

У наступних таблицях подамо кількість ітерацій, затрачених для розв’язування прикладів 1–3 розглянутими методами при різних фіксованих значеннях числових параметрів a та b та при $m = 100$, $\varepsilon = 10^{-15}$, $x_0 = \overline{x}$, $x_{-1} = y_0 = x_0 - 10^{-4}$.

У таблицях 3 – 5 у лівому стовпці наведено результати отримані однокроковим методом типу хорд, а у правому – двокроковим методом.

Таблиця 3

Приклад 1

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	-	-	15	14	16	15
-0.5	-	14	13	19	18	13
0	15	13	14	17	19	14
0.5	14	15	17	19	21	17
1	16	18	19	21	22	19
(15)	15	13	14	17	19	14

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	18	17	16	15	14	16
-0.5	17	16	15	14	13	17
0	16	15	14	13	12	14
0.5	15	14	13	12	14	15
1	14	14	12	13	11	12
(15)	16	15	14	13	12	14

Таблиця 4

Приклад 2

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	-	11	9	8	8	9
-0.5	11	9	8	8	9	8
0	9	8	7	9	9	7
0.5	8	8	9	9	10	9
1	8	9	9	10	10	9
(15)	9	8	7	9	9	7

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	8	8	8	8	7	8
-0.5	8	8	7	7	7	7
0	8	7	7	7	6	7
0.5	8	7	7	6	6	7
1	7	7	6	6	6	6
(15)	8	7	7	7	6	7

Таблиця 5

Приклад 3

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	6	6	6	5	5	6
-0.5	6	6	5	5	5	5
0	6	5	5	5	6	5
0.5	5	5	5	6	6	5
1	5	5	6	6	6	6
(15)	6	5	5	5	6	5

a \ b	-1	-0.5	0	0.5	1	(15)
-1	5	5	5	5	5	5
-0.5	5	5	5	5	4	5
0	5	5	5	4	4	5
0.5	5	5	4	4	4	4
1	5	4	4	4	5	4
(15)	5	5	5	4	4	5

Також проведено обчислення при фіксованому одному з параметрів і при змінному іншому параметрі за одним із законів $10^{-p}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|^q$, $10^{-p}\left\|F\left(x_n\right)\right\|^q$, $p = 2,\ 4,\ 6$, $q = 1,\ 2$. Для однокрокового методу найкращим виявився вибір фіксованого параметра нульовим і змінного параметра у вигляді

$$10^{-2}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|^2, \tag{15}$$

тобто коли узагальнений метод хорд прямує до методу Ньютона. Серед двокрокових методів найшвидшу збіжність показують методи з одним фіксованим параметром, який дорівнює одиниці, й іншим змінним параметром, який прямує до нуля. У цьому випадку двокроковий метод прямує до відомого різницевого методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$.

5. ВИСНОВКИ

Отже, запропоновано однокроковий і двокроковий ітераційні методи для розв’язування нелінійних рівнянь. Частковими випадками цих методів є низка відомих ітераційних методів. Введення числового параметра дало підстави застосувати єдиний підхід до теоретичного і практичного дослідження різних методів. Проведено теоретичне дослідження однокрокового методу типу хорд. На тестових прикладах досліджено вплив параметрів методів на швидкість і величину області збіжності.

ЛІТЕРАТУРА

36. *Бартіш М.Я.* Про один ітераційний метод розв’язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – Т. 5. – С. 387–391.
37. *Бартіш М.Я., Щербина Ю.М.* Про один різницевий метод розв’язування операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – Т. 7. – С. 579–582.
38. *Курчатов В. А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. – 1971. – Т.198, № 3. – С.524-526.
39. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М., 1975.
40. *Шахно С.М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв’язування нелінійних рівнянь // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, №1. – С.79–86.
41. *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 296–305.
42. *Amat S., Busquier S., Candella V.* A class of quasi-Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces // J. Comput. Appl. Math. – 2002. – Vol. 149. – P. 397–406.
43. *Argyros I.K.* On an Algorithm for Solving Nonlinear Operator Equation // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, №1. – P. 83–92.
44. *Chen J., Shen Z.* Convergence analysis of the secant type method // AMC (Appl. Math. Comp.). – 2007. – Vol. 188. – P. 514–524.
45. *Hernandez M.A., Rubio M.J.* The Secant method and divided differences Hölder continuous // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – Vol. 124. – P. 139–149.
46. *Laasonen P.* Ein überquadratisch konvergenter iterativer Algorithmu // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.. – 1969.
47. *Lukšan L.* Inexact Trust Region Method for Large Sparse Systems of Nonlinear Equations // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1994. – Vol. 81. – P. 569–590.
48. *Potra F.-A.* On an iterative algorithm of order 1,839... for solving nonlinear equations. – 1984–85. – Vol. 7, №1. – P. 75–106.
49. *Shakhno S.M.* On a Kurchatov’s method of linear interpolation for solving nonlinear equations // PAMM – Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – Vol. 4. – P. 650–651.
50. *Shakhno S.M.* On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 231. – P. 222–235.

51. *Traub J.F.* Iterative Methods for the Solution of Equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, 1964.
52. *Vaarmann O.* High order iterative methods for decomposition-coordination problems // Technological and economic developmeny of economy. – 2006. – Vol. 12, № 1. – P. 55–61.
53. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 123–134.
54. *Werner W.* Some supplementary results on the $1+\sqrt{2}$ order method for the solution of nonlinear equations // Numer. Math. – 1982. – Vol. 38. – P. 383–392.
55. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 333–342.

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТИПА ХОРД ДЛЯ РАЗВЯЗЫВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Шахно, С. Граб, Г. Ярмола

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Предложены одношаговая и двухшаговая модификации метода хорд с использованием аппроксимации производной Фреше разделенными разностями. Изучена локальная сходимость одношагового метода в случае, когда разделенные разности удовлетворяют обобщенное условие Липшица. Найдены условия и скорость сходимости этого метода, определена область единственности решения задачи. Проведено сравнение предложенных методов на тестовых примерах.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, метод типа хорд, порядок сходимости

TWOPARAMETRIC SECANT TYPE METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

S. Shakhno, S. Grab, H. Yarmola

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

An one-step and two-step modifications of secant method for solving nonlinear equations using the approximation of Frechet derivative by divided differences of the first order are suggested. Local convergence of one-step method in the case when divided differences satisfy the generalized Lipschitz condition is studied. We determined the conditions and convergence order of this method, as well as the uniqueness ball of the problem. The comparison of the offered methods on the test examples is conducted.

Key words: nonlinear equation, secant type method, convergence order

Стаття надійшла до редколегії 06.07.2009
Прийнята до друку 28.10.2009