*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ* *VISNYK LVIV UNIV*
*Сер. прикл. матем. інформ.* *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
*2008. Вип. 14. С. 170–176* *2008. No 14. P. 170–176*

*УДК 519.6*

# ПОШИРЕННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРНИМИ ПУЧКАМИ

**Світлана Ярошко[*], Сергій Ярошко[**]**

[*]*Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, тел. 80322758760*
[**]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua*

Обґрунтовано можливість поширення модифікованого методу послідовних наближень на узагальнені спектральні задачі з поліноміальними пучками лінійних цілком неперервних операторів, що діють у гільбертовому просторі. Доведено ефективність цього методу для розв'язування нелінійних спектральних задач такого типу.

*Ключові слова*: цілком неперервний оператор, характеристичне число, власна функція, модифікований ітераційний метод, операторний пучок.

## 1. ВСТУП

У прикладних фізичних та математичних дослідженнях часто виникає проблема розв'язування узагальнених спектральних задач. Зокрема, такі задачі виникають під час дослідження кількісних та якісних характеристик складних випромінювальних систем [2], у теорії нелінійного структурного аналізу [4], під час розв'язування задач еластопружності тощо.

Основи загальної теорії узагальнених спектральних задач закладені ще в працях М.В. Келдиша [5]. Більшість сучасних дослідників розглядає методи розв'язування окремих класів узагальнених спектральних задач, серед яких важливе місце посідають задачі з поліноміальною залежністю від спектрального параметра. Цікаві результати для такого класу задач отримано в [1, 5, 6], де використано підхід, що ґрунтується на лінеаризації задачі за спектральним параметром.

Розвинемо підхід до розв'язування спектральних задач з поліноміальними операторними пучками довільного степеня $n$ із використанням модифікованого методу послідовних наближень (ММПН) [3]. Викладемо теоретичне обґрунтування цього підходу та наведемо результати числового розв'язування конкретної задачі. Частковий випадок застосування цієї методики для обчислення власних пар квадратичного пучка лінійних цілком неперервних операторів, що діють у гільбертовому просторі, опубліковано в [8].

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо спектральну задачу

$$L(\mu)u = 0 \tag{1}$$

з поліноміальним пучком вигляду

$$L(\mu) = L_n\mu^n + L_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + L_1\mu + I\,, \tag{2}$$

де $I$ – одиничний оператор; $L_1,...,L_n$ – лінійні цілком неперервні оператори, що діють у гільбертовому просторі $E$; $u \in E$ – елементи простору $E$; $\mu \in C$ – числовий параметр.

Виконаємо лінеаризацію вихідної задачі (1), а після цього для розв'язування отриманої лінійної задачі застосуємо модифікований метод послідовних наближень, який дає змогу обчислити її характеристичні числа і власні вектори.

Ідею лінеаризації було запропоновано Б.М. Подлевським у [7] під час дослідження поліноміальних пучків самоспряжених операторів.

Процедура лінеаризації не залежить від розмірності простору, в якому діють оператори $L_i$ – коефіцієнти пучка (2). Її можна проводити і тоді, коли $L_i$ – матриці розмірів $M \times M$, що задають лінійні оператори в евклідовому просторі $E = E^M$, і тоді, коли $L_i$ – лінійні оператори, що діють у гільбертовому просторі $E$.

Уведемо простір $\tilde{E}$ як пряму (ортогональну) суму $n$ копій вихідного простору $E$: $\tilde{E} = \overset{n}{\oplus} E$; $n$ – степінь пучка. Елементи простору $\tilde{E}$ позначимо $\tilde{u} = \left(u^{(1)},...,u^{(n)}\right)^T$, де $u^{(i)} \in E$.

У просторі $\tilde{E}$ задачі (1) відповідає лінійна задача

$$(\tilde{I} - \mu\tilde{L})\tilde{u} = 0, \qquad (3)$$

де $\tilde{I}$ – одиничний оператор у просторі $\tilde{E}$; $\tilde{L}$ – супутній пучку (2) блоковий оператор (лінеаризатор пучка):

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & I & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \\ -L_n & -L_{n-1} & ... & -L_2 & -L_1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Нелінійна задача (1) і лінійна задача (3) є спектрально еквівалентними. Цю еквівалентність визначають такі твердження з [6].

**Лема 1.** *Характеристичні числа пучка* $L(\mu)$ *(і тільки вони) є характеристичними числами супутнього оператора* $\tilde{L}$.

**Лема 2.** *Пара* $\langle 1/\mu_i, u_i \rangle$ *є власною парою пучка* (2) *тоді й тільки тоді, коли власною парою оператора* (10) *є* $\left\langle 1/\mu_i, \left(u_i, \mu_i^{-1}u_i, ..., \mu_i^{1-n}u_i\right)^T \right\rangle$.

Ці твердження справджуються як для матричних операторів, так і для лінійних, зокрема, цілком неперервних операторів, що діють у гільбертовому просторі.

Отже, розв'язування спектральної задачі (1) з поліноміальним операторним пучком (2) зводиться до розв'язування лінійної спектральної задачі (3) з блоковим оператором (4).

## 2. ПОШИРЕННЯ ММПН

Для того, щоб до лінійної задачі (3) можна було застосувати модифікований метод послідовних наближень, необхідно, щоб спектр характеристичних чисел оператора (4) був дискретним і скінченним або зліченним з єдиною точкою скупчення на нескінченності. Цей факт можна одержати як наслідок теореми Келдиша [5, с. 39, 327]. Проте зробити це досить важко. Тому пропонуємо безпосереднє доведення, яке досить просте й ефективне для розглядуваного випадку.

**Лема 3.** *Спектр характеристичних чисел оператора* $\tilde{L}$ *дискретний і є або скінченним, або має єдину точку скупчення на нескінченності.*

*Доведення*. Поряд з оператором $\tilde{L}$ розглянемо оператор $\tilde{L}^n$, отриманий шляхом піднесення оператора $\tilde{L}$ до степеня $n$ ($n$-разового множення оператора $\tilde{L}$). Цей оператор має вигляд

$$\tilde{L}^n = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Елементи першого рядка оператора (5) визначені так

$$a_1^{(1)} = -L_n,\ a_2^{(1)} = -L_{n-1}, \dots,\ a_n^{(1)} = -L_1. \tag{6}$$

Елементи рядків з номерами $k$ ($k = 2, \dots, n$) можна визначити за рекурентними формулами

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= a_n^{(k-1)} a_1, \\ a_j^{(k)} &= a_n^{(k-1)} a_j + a_{j-1}^{(k-1)}, \quad j = 2, \dots, n \end{aligned} \tag{7}$$

З побудови видно, що кожен елемент $a_j^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n$) оператора (5) є лінійною комбінацією добутків степенів, що не превищують $k$, лінійних цілком неперервних операторів, які діють у гільбертовому просторі $E$. Згідно з відомими з функціонального аналізу властивостями лінійних цілком неперервних операторів, можна стверджувати, що кожен елемент $a_j^{(k)}$ – це лінійний цілком неперервний оператор, що діє у гільбертовому просторі $E$.

Доведемо, що оператор (5) – цілком неперервний. Скористаємось ідеєю доведення, викладеного у [8]. Нехай $\tilde{x} \in \tilde{E}$. Тоді

$$\tilde{L}^n \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \dots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \dots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \tilde{u}. \tag{8}$$

Розглянемо:

$$u^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)} x^{(j)},\ k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Оскільки $a_1^{(k)}$ – лінійний цілком непервний оператор, то з послідовності $\{x_m^{(1)}\}$ можна виділити підпослідовність $\{x_{m_1}^{(1)}\}$ таку, що послідовність $\{a_1^{(k)} x_{m_1}^{(1)}\}$ – збіжна. Аналогічно, з послідовності $\{x_{m_1}^{(1)}\}$ можна виділити підпослідовність $\{x_{m_1}^{(2)}\}$, що послідовність $\left\{a_2^{(k)}x_{m_{1_2}}^{(2)}\right\}$ буде збіжна і т.д. Такі ж міркування можна застосувати для всіх доданків суми (9). Врахуємо також, що сума скінченної кількості лінійних цілком неперервних операторів – це також лінійний цілком неперервний оператор.

Остаточно отримаємо таке: з будь-якої послідовності $\left\{\tilde{x}_m\right\}$ можна виділити таку підпослідовність $\left\{\tilde{x}_p\right\}$, що послідовність $\left\{\tilde{u}_p\right\}=\left\{\tilde{L}^n\tilde{x}_p\right\}$ – збіжна. Отже, можна зробити висновок, що оператор $\tilde{L}^n$ – цілком неперервний.

Лему доведено.

Множина характеристичних чисел $\left\{\mu_i^n\right\}$ лінійного цілком неперервного оператора $\tilde{L}^n$ є дискретною, скінченною або зліченною з єдиною точкою скупчення на нескінченності. Очевидно, що така ж властивість виконується і для множини $\left\{\mu_i\right\}$ характеристичних чисел оператора $\tilde{L}$.

Для розв’язування лінійної спектральної задачі (3) з блоковим оператором (4) можна використати модифікований метод послідовних наближень. Оскільки оператор $\tilde{L}$ – цілком неперервний, то характеристичні числа $\mu_i, i=1,2,...$ задачі (3),(4) є коренями характеристичного ряду

$$F(\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\mu^j . \tag{10}$$

Як і в [3], запишемо допоміжне неоднорідне рівняння:

$$\left(\tilde{I}-\mu\tilde{L}\right)\tilde{u}=\tilde{v}_0F(\mu), \tag{11}$$

де $\tilde{v}_0\in\tilde{E}$ – деяка початкова функція, яку можна розвинути в ряд за власними функціями оператора $\tilde{L}$.

Рівняння (11) має розв’язок за будь-яких значень $\mu$ і довільного $\tilde{v}_0$. Причому якщо $\mu$ збігається з одним із характеристичних чисел $\mu_k$ оператора (4), то розв’язком рівняння (11) є власна функція $u_k$ задачі (3).

Розв’язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{u}=\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{Z}_m\mu^m , \tag{12}$$

де

$$\tilde{Z}_m=\sum_{j=0}^{m}c_j\tilde{v}_{m-j} , \tag{13}$$

$$\tilde{v}_j=\tilde{L}\tilde{v}_{j-1}=\tilde{L}^j\tilde{v}_0,\ j=1, 2, ... , \tag{14}$$

Необхідні й достатні умови, що їх повинні задовольняти невідомі коефіцієнти $c_j$, які є у формулі (13), визначають теореми, опубліковані в [9].

Після застосування для розв’язування задачі (3) обчислювального алгоритму модифікованого методу послідовних наближень [3, 9] отримаємо її характеристичні числа $\mu_i, i=1,2,...$ та власні функції $\tilde{u}_i=\left(u_i^{(1)},...,u_i^{(n)}\right)^{\mathrm{T}}$. Згідно з лемою 1, знайдені характеристичні числа є водночас характеристичними числами операторного пучка

(2). Власними функціями цього пучка, згідно з лемою 2, є перші компоненти $u_i^{(1)}$ знайдених власних функцій $\tilde{u}_i$ оператора (4).

Отже, задачу обчислення характеристичних чисел і власних функцій поліноміального операторного пучка (2) повністю розв'язано.

*Зауваження.* Описаний у цій статті підхід можна використовувати і в скінченновимірному випадку для обчислення наближених характеристичних чисел поліноміального матричного пучка вигляду (2), якщо потрібно знайти лише декілька перших з них. Особливо тоді, коли степінь пучка та розміри його матриць-коефіцієнтів великі.

3. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Підтвердимо теоретичні викладки прикладом практичного розв'язування спектральної задачі. Розглянемо спектральну задачу з кубічним пучком лінійних цілком неперервних операторів

$$L(\mu) = L_3\mu^3 + L_2\mu^2 + L_1\mu + I \,, \tag{15}$$

де $I$ – одиничний оператор у просторі $\boldsymbol{L}_2[0;1]$, $L_1, L_2, L_3$ – лінійні цілком неперервні оператори, що діють у цьому ж просторі. Оператори $L_1, L_2, L_3$ визначені так:

$$L_1 y = -\int_0^1 G(x,t)\, y(t)\, dt \,,\ L_2 y = -p\int_0^1 t^2 G(x,t)\, y(t)\, dt \,,$$

$$L_3 y = -p^2\int_0^1 t^4 G(x,t)\, y(t)\, dt \,,\ G(x,t) = \begin{cases} t, & t \le x \\ x, & t \ge x \end{cases}. \tag{16}$$

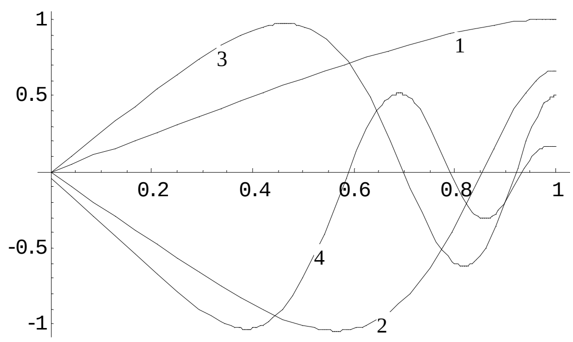


Рисунок. Власні функції задачі (15),(16), $p$=10.

Застосуємо процедуру лінеаризації, у просторі $\tilde{E} = E \oplus E \oplus E$ перейдемо від нелінійної задачі з кубічним операторним пучком до спектрально еквівалентної їй лінійної задачі. За допомогою модифікованого методу послідовних наближень (виконано 20 кроків) отримано власні значення та власні функції цієї задачі для різних значень параметра $p$, наприклад:

для $p$=1: $\lambda_1$ = 0.86243872; $\lambda_2$ = 0.2291;

для $p$=3: $\lambda_1$ = 1.47873094; $\lambda_2$ = 0.439856; $\lambda_3$ = 0.15

для $p$=10: $\lambda_1$ = 2.93554285317; $\lambda_2$ = 0.93411189; $\lambda_3$ = 0.623; $\lambda_4$ = 0.44.

У кожному зі знайдених власних значень наведено лише ті десяткові знаки, які стабілізувались у ході обчислень.

На рисунку зображено чотири перші власні функції для випадку $p$=10 (номер кривої відповідає номеру функції).

Зазначимо, що в літературі здебільшого викладені результати розв’язування спектральних задач з поліноміальними матричними пучками довільного степеня та квадратичними пучками операторів. Прикладів розв’язування задач з операторними пучками степеня $n \geq 3$ автори не знайшли.

## 4. ВИСНОВКИ

Отже, викладені дослідження дають змогу розширити сферу застосування модифікованого методу послідовних наближень. А саме: обґрунтовано можливість його використання для розв’язування узагальнених спектральних задач з поліноміальними пучками лінійних цілком неперервних операторів, що діють у гільбертовому просторі, та наведено приклад обчислення характеристичних чисел і власних функцій кубічного операторного пучка.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Балинский А.И., Подлевский Б.М.* Метод последовательных приближений в задаче о собственных значениях пучка дифференциальных операторов // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. Вып. 18. С. 18–21.
2. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 286 с.
3. *Войтович Н.Н., Ровенчак А.И.* Модификация метода последовательных приближений для однородных задач // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1982. Т. 22. № 22. С. 348–357.
4. *Иванов Б.А.* О приближенном вычислении позитивного собственного значения положительного оператора при нелинейном вхождении параметра // Зап. науч. семинаров Ленинград. отд-ния Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1976. Вып. 58. С. 37–39.
5. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов самосопряженных линейных операторов. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 15–41.
6. *Подлевський Б.М.* Деякі алгоритми розв’язку спектральних задач для поліноміальних операторних пучків: Препринт АН УРСР. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики; 15–90. Львів: 1990. 14 с.
7. *Подлевский Б.М.* О самосопряженных операторных пучках, спектрально еквивалентных самосопряженным операторам // Укр. матем. журн. 1984. № 5. С. 660–662.
8. *Ярошко С.М.* Обчислення власних значень квадратичного операторного пучка модифікованим методом послідовних наближень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2000. Вип. 2. С. 72–76.
9. *Ярошко С.М.* Про обґрунтування модифікованого методу послідовних наближень відшукання характеристичних чисел лінійних цілком неперервних операторів. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2002. Вип. 5. С. 51–60.

# EXPANSION OF THE MODIFIED METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS ON SPECTRUM PROBLEMS WITH POLYNOMIAL OPERATOR PENCILS

**Svitlana Yaroshko[*], Sergiy Yaroshko[**]**

*[**]National University "Lvivska Politekhnika"*
*S.Bandery str, 12, Lviv, 79013, ph. 80322758760*
*[**]Ivan Franko National University In Lviv*
*Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua*

In this work the modified method of successive approximations is extended for generalized spectral problems with a polinomial pencil of linear completely continuous operators acting in a gilbert space. The effectiveness of this method is demonstrated by an example of using the method to solve a model spectral problem.

*Key words*: completely continuous operator, characteristic number, eigenfunction, modified method of successive approximations, operator pencil.

*Стаття надійшла до редколегії 02.10.2007*
*Прийнята до друку 08.10.2008*