

УДК 681.324

**ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ  
В ПЛАСТИНІ ЗА ЗМІШАНИХ УМОВ ТЕПЛООБМІНУ НА ОСНОВІ  
ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ**

**В. Трушевський<sup>\*</sup>, Г. Шинкаренко<sup>\*\*\*</sup>, Н. Щербина<sup>\*\*</sup>**

*<sup>\*</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000*

*<sup>\*\*</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
імені Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79601*

*<sup>\*\*\*</sup>Політехніка Опольська, вул. Любошицька, 5, м. Ополь, 45043, Польща*

Розглянуто наближене розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для трансверсально ізотропної пластини за змішаних граничних умов теплообміну з застосуванням алгоритму на основі рекурентної штучної нейронної мережі (ШНМ). За основу роботи ШНМ взято ідею мультисіткового ітераційного методу. Для дослідження температурного поля в тонкій пластині використано рівняння, отримані методом апроксимації температури поліномами Лежандра. Розглянуто лінійний розподіл температури за товщиною. Просторово-часову дискретизацію задачі виконано з застосуванням проекційно-сіткової схеми методу скінченних елементів. Побудована ШНМ розв'язує систему лінійних алгебричних рівнянь на кожному часовому кроці, реалізуючи мультисітковий метод. Наведено результати обчислювальних експериментів стосовно точності побудованої обчислювальної схеми на основі ШНМ. Досліджено залежність температури у пластині з часом, вплив анізотропії матеріалу.

*Ключові слова:* нестационарна задача, теплопровідність, пластина, рекурентні штучні нейромережі

**1. ВСТУП**

Розв'язуванню стаціонарних і нестационарних температурних задач присвячено багато праць. У кожному конкретному випадку вибір методу розв'язування залежить від складності досліджуваної задачі, простоти числової реалізації математичної моделі [1, 2–5, 7–10, 12–14].

Розв'язки нестационарних задач теплопровідності пластин із композитних матеріалів мають важливе практичне значення. Для розрахунку пластин із композитних матеріалів за дії силових і температурних полів необхідно залучати моделі, які враховують специфічні особливості матеріалу, зокрема анізотропію, термочутливість. У цьому разі певне ускладнення математичної моделі потребує застосування ефективних методів їхньої реалізації [4, 7]. Окрім того, зазначимо, що розв'язування відомими числовими методами [1, 5, 10, 13] параболічних диференціальних рівнянь через залежність розв'язку від часу потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому пошук нових ефективних методів розв'язування цього класу задач далі актуальний.

У [9] операторним методом і методом граничного переходу отримано точні й наближені рівняння узагальненої теплопровідності анізотропних та ізотропних пластин. У [7] для наближеного розв'язування нестационарних задач теплопровідності

застосовано метод апроксимації функції температури та її похідної поліномами Лежандра. У такий спосіб тривимірну щодо просторових координат температурну задачу зредуковано до двовимірної. У [4, 7] побудовані моделі враховують задані граничні умови теплообміну на лицьових поверхнях пластини. Для достатньо тонких пластин приймають лінійний розподіл температури за товщиною. Таке припущення суттєво спрощує пошук розв'язку задачі теплопровідності. У [4] наведено нестационарні рівняння теплопровідності тонких анізотропних пластин, побудовані методом розвинення температури в ряд за поліномами Лежандра, для таких граничних умов теплообміну на лицьових поверхнях: задані конвективний теплообмін між поверхнею пластини і зовнішнім середовищем; розподіл температури; густина теплових потоків; а також мішані умови (наприклад, на одній поверхні задано температуру, а на іншій – конвективний теплообмін, або тепловий потік та конвективний теплообмін). Один із варіантів системи диференціальних рівнянь, яка описує нестационарне температурне поле трансверсально ізотропної пластини, ми використаємо.

У [12] запропоновано альтернативний підхід для наближеного розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності, що ґрунтується на реалізації проєкційно-сіткової схеми мультисітковим методом на рекурентній штучній нейронній мережі. Апробацію алгоритму виконано на задачі теплопровідності стрижня й досліджено достовірність отримуваних результатів шляхом порівняння їх з розв'язками, що знайдені іншими методами.

Мета цієї роботи – дослідити можливість застосування новітньої технології штучних нейронних мереж до розв'язування нестационарних задач теплопровідності для пластин за змішаних граничних умов теплообміну й проаналізувати вплив параметрів анізотропії матеріалу і часу на розподіл температури.

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо тонку анізотропну пластину сталої товщини  $2H$ , віднесена до декартової системи координат  $x, y, z$ . Координатні лінії збігаються з напрямом анізотропії. Координата  $z$  спрямована у напрямі нормалі до серединної поверхні пластини ( $z=0$  – рівняння серединної поверхні). Пластину нагріває зовнішнє середовище внаслідок теплообміну через її лицьові ( $z = \pm H$ ) і бічну поверхні. Температури середовища на цих поверхнях є незалежними функціями. Припускаємо, що теплофізичні характеристики матеріалу пластини не залежать від температури, що спрощує математичну модель.

На лицьових поверхнях задано конвективний теплообмін між пластиною і зовнішнім середовищем згідно з законом Ньютона

$$\lambda_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \pm \alpha_z^{\pm} (\theta - \theta_c^{\pm}) = 0 \text{ при } z = \pm H, \quad (1)$$

де  $\theta = \theta(x, y, z, \tau)$  – температура в довільній точці  $(x, y, z)$  пластини в момент часу  $\tau$ ;  $\alpha_z^{\pm}$ ,  $\theta_c^{\pm}$  – коефіцієнти тепловіддачі і температура середовища на поверхнях  $z = \pm H$ .

Якщо внутрішні джерела тепла відсутні, то температуру анізотропної пластини в момент часу  $\tau$  визначають з рівняння теплопровідності [8]

$$\Delta \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a_z} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де  $\Delta = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $k_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{zz}}$  ( $i, j = x, y$ );  $a_z = \frac{\lambda_{zz}}{c_v}$  – коефіцієнт температуропровідності в напрямі осі  $z$ ;  $\lambda_{ij}$  – коефіцієнти теплопровідності.

Розв'язок рівняння (2) повинен задовольняти, крім умови (1), ще початкову умову, яка задає розподіл температури у пластині в початковий момент часу  $\tau = 0$ , а також граничні умови теплообміну на її бічній поверхні. Початкова умова має вигляд

$$\theta(x, y, z, \tau) = \theta_0(x, y, z) \text{ при } \tau = 0, \quad (3)$$

де  $\theta_0(x, y, z)$  – відома функція.

Для формулювання задачі теплопровідності пластини використовують такі граничні умови теплообміну з зовнішнім середовищем: а) граничні умови першого роду (на поверхні пластини задано розподіл температури); б) граничні умови другого роду (задано густину теплового потоку); в) граничні умови теплообміну третього роду (потік тепла через поверхню пластини пропорційний до різниці температур поверхні пластини та зовнішнього середовища). У випадку змішаних граничних умов теплообміну на частинах поверхні пластини задають різні з перелічених вище умов. Розглянемо випадок, коли одна частина бічної поверхні пластини теплоізолювана, а на другій її частині задана температура.

Визначення нестационарного температурного поля в анізотропній пластині навіть зі сталими теплофізичними характеристиками у точному формулюванні пов'язане зі значними, не завжди подоланими математичними труднощами. Тому для розв'язування такого класу задач застосовують різного рівня апроксимаційні моделі, числова реалізація яких передбачає розвиток ефективних високоточних методів. Далі сформулюємо математичну модель нестационарної теплопровідності трансверсально ізотропної пластини за змішаних граничних умов теплообміну в рамках першого наближення [7] та наведемо побудований ефективний алгоритм на основі ШНМ, який реалізує високоточний розв'язок досліджуваної задачі. Особливостям наближеного розв'язування лінійних крайових та початково-крайових задач з застосуванням мультисіткового ітераційного нейронного методу присвячені праці [11, 12].

### 3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТОНКОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

Для визначення температурного поля, що змінюється з часом, у тонкій трансверсально ізотропній пластині за мішаних граничних умов теплообміну на її поверхнях використаємо рівняння теплопровідності [4], які є двовимірним аналогом рівняння (2). Рівняння отримано методом апроксимації функції температури  $\theta$  та її

похідної  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  поліномами Лежандра. Відповідно до [7], визначаємо

$$\theta = \sum_{k=0}^n T_k p_k(z/H), \quad Q = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n+1} Q_k p_k(z/H) dz,$$

де коефіцієнти розвинень  $T_k$  і  $Q_k$  пов'язані співвідношеннями

$$\frac{T_k}{H} = \frac{Q_{k-1}}{2(k-1)+1} - \frac{Q_{k+1}}{2k+1}; \quad T_k = \frac{2k+1}{2H} \int_{-H}^H \theta p_k(z/H) dz, \quad p_k - \text{поліноми Лежандра.}$$

Для достатньо тонких пластин приймають лінійний розподіл температури за товщиною

$$\theta = T_0 + T_1 \frac{z}{H} \quad (4)$$

та, відповідно,  $Q = Q_0 + Q_1 \frac{z}{H} + \frac{1}{2} Q_2 \left( 3 \frac{z^2}{H^2} - 1 \right)$ .

У формулі (4)  $T_0 = \frac{1}{2H} \int_{-H}^H \theta dz$ ,  $T_1 = \frac{3}{2H^2} \int_{-H}^H \theta z dz$  – інтегральні характеристики

температури.

У випадку першого наближення [7] для визначення інтегральних характеристик температури  $T_0$  і  $T_1$  (див. формулу (4)) застосуємо відповідну систему двох диференціальних рівнянь з частинними похідними (першого порядку за часовою координатою і другого порядку за просторовими координатами). Залежно від заданих граничних умов теплообміну на лицьових поверхнях  $z = \pm H$  маємо зв'язану чи незв'язану систему диференціальних рівнянь відносно усереднених за товщиною величин  $T_0$  і  $T_1$ . У цьому випадку значно спрощується пошук розв'язку задачі теплопровідності. Зазначимо таке: якщо задача теплопровідності симетрична відносно серединної поверхні  $z = 0$  пластини, тобто температура зовнішнього середовища на лицьових поверхнях  $z = \pm H$  однакова ( $\theta_c^+ = \theta_c^- = \theta_c$ ) і коефіцієнти теплопровідності однакові ( $\alpha_z^+ = \alpha_z^- = \alpha_z$ ), то замість наближеної системи двох зв'язаних рівнянь для визначення  $T_0$  і  $T_1$ , отримаємо незв'язану систему диференціальних рівнянь теплопровідності для визначення нестационарного плоского температурного поля в анізотропній пластині.

Розглянемо випадок, коли температурне поле залежить тільки від координати  $x$  і часу  $\tau$ , тобто  $\theta = \theta(x, \tau)$ . Додатково до умов (1), (3) припускаємо, що температура середовища на лицьових поверхнях  $z = \pm H$  однакова й дорівнює нулю ( $\theta_c^+ = \theta_c^- = 0$ ), нижня лицьова поверхня пластини  $z = -H$  теплоізольована ( $\alpha_z^- = 0$ ). Тоді для визначення усереднених характеристик температури, користуючись наведеними у [4] співвідношеннями, отримаємо незв'язані диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Записані відносно безрозмірних величин ці рівняння мають такий вигляд:

$$\Lambda_{xz} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{2\omega^+(6 + \omega^+)}{\delta} T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial Fo}, \quad (5)$$

$$\Lambda_{xz} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{15(5 - \delta)}{\delta} T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial Fo}. \quad (6)$$

Тут  $\Lambda_{xz} = \left( \frac{\lambda_{xx}}{\lambda_{zz}} \right) \left( \frac{H}{l} \right)^2$  – параметр, який характеризує вплив анізотропії

матеріалу на розподіл температури;  $\lambda_{xx}$ ,  $\lambda_{zz}$  – коефіцієнти теплопровідності матеріалу пластини у напрямі осей  $x$  і  $z$ , відповідно;  $l$  – характерний лінійний

розмір пластини;  $\delta = -3(4 + \omega^+)$ ;  $\omega^+ = \frac{H\alpha_z^+}{\lambda_{zz}}$  – безрозмірний параметр (критерій Біо);

$Fo = \left(\frac{H^2}{a_z \tau}\right)^{-1}$  – безрозмірний час (критерій Фур'є).

У випадку, коли у початковий момент часу  $\tau=0$  (відповідно,  $Fo=0$ ) температура дорівнює нулю ( $\theta_0=0$ ), початкова умова (3) з урахуванням (4) набуває вигляду

$$T_0(x, Fo) = 0, T_1(x, Fo) = 0 \text{ при } Fo = 0.$$

Тут розглянемо такі змішані граничні умови на бічній поверхні пластини: одна частина поверхні теплоізолювана (густина теплового потоку дорівнює нулю), а на іншій її частині задано температуру. Отже, нестационарна задача теплопровідності для трансверсально ізотропної пластини полягає у розв'язанні двох незалежних диференціальних рівнянь (5) і (6) параболічного типу за відповідних початкових (7) і граничних умов (8), (9) на функції  $T_0$  і  $T_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} T_0(x, Fo) = 0, \frac{\partial}{\partial x} T_1(x, Fo) = 0 \text{ при } x = 0, \quad (8)$$

$$T_0(x, Fo) = T^*, T_1(x, Fo) = 0 \text{ при } x = 1. \quad (9)$$

Умова (8) означає, що край  $x=0$  теплоізолюваний. Після того, як  $T_0$  і  $T_1$  будуть визначені, температуру  $\theta$  у довільній точці пластини наближено обчислюємо за формулою (4). Не зменшуючи загальності, обмежимося випадком, коли  $T_0 \neq 0$ ,  $T_1 = 0$ . У конкретному випадку за умов сформульованої задачі теплопровідності впливає, що  $T_1 = 0$ . З огляду на це, щоб дослідити розподіл температури  $\theta(x, \tau)$  у пластині, треба визначити функцію  $T_0(x, \tau)$ . Для пошуку розв'язку цієї задачі реалізуємо мультисітковий метод на рекурентній нейронній мережі відповідно до схеми, детально описаної у праці [12]. Далі зацентруємо увагу на головних фрагментах запропонованої обчислювальної схеми для розв'язування початково-крайової задачі (5), (7–9).

#### 4. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Для формалізації початково-крайової задачі (5), (7–9) та спрощення запису її математичної моделі введемо нові позначення:

$$u \equiv T_0, u^* \equiv T^*, t \equiv Fo, \beta \equiv \frac{2\omega^+(6 + \omega^+)}{\delta}, \alpha \equiv \Lambda_{xz}. \quad (10)$$

Тоді з урахуванням (10) сформулюємо досліджувану задачу теплопровідності пластини у такий спосіб:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти розподіл температури } u = u(x, t) \text{ такий, що} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, 1) \times (0, T], \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(1, t) = u^* \quad \forall t \in [0, T], \\ u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (11)$$

Виконаємо варіаційне формулювання задачі (11). Для цього введемо простір допустимих функцій

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(1) = 0\}$$

а також білінійні форми

$$m(u, v) := \int_0^1 uv dx \quad \forall u, v \in H := L^2(0, 1),$$

$$c(u, v) := \int_0^1 \left( -\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta uv \right) dx \quad \forall u, v \in V.$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (11) набуде вигляду

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V; \\ \text{знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(u'(t), v) - c(u(t), v) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (12)$$

Для розв'язування варіаційної задачі (12) застосуємо обчислювальну схему, яка детально описана у [13]. На першому кроці виконаємо просторово-часову дискретизацію задачі (12) з застосуванням проекційно-сіткової схеми [12], а на другому кроці для розв'язування повністю дискретизованої задачі використовуємо побудовану ШНМ.

#### 5. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Поділимо відрізок часу  $[0, T]$  на  $N_T$  частин  $[t_j, t_{j+1}]$  сталої довжини  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ ,  $j = 0, \dots, N_T$  та застосуємо кусково-лінійні апроксимації, які визначені у роботі [12], для наближення розподілу температур

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x, t) := u^j(x)[1 - \omega(t)] + u^{j+1}(x)\omega(t) \\ \equiv u^j(x) + \dot{u}^{j+1}(x)\Delta t\omega(t), \quad \dot{u}^{j+1}(x) := \frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\Delta t}, \\ \omega(t) := \frac{t - t_j}{\Delta t} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Тоді дискретизовану за часом варіаційну задачу (12) зведемо до однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом:

$$\begin{cases} \text{задано початковий розподіл } u^0 = u_0, \text{ значення} \\ \text{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \text{ та параметра схеми } \rho \in [0, 1]; \\ \text{знайти пару } \{\dot{u}^{j+1}, u^{j+1}\} \in V \times V \text{ таку, що} \\ m(\dot{u}^{j+1}, v) + \rho \Delta t c(\dot{u}^{j+1}, v) = -c(u^j, v) \quad \forall v \in V, \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+1}, \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{cases} \quad (14)$$

Отримана однокрокова рекурентна схема (14) дає змогу обчислити апроксимації для розподілу температур  $u^{j+1} \in V$  у будь-якій точці часового проміжку  $[0, T]$ , розв'язавши варіаційну задачу щодо швидкості зміни температури  $\dot{u}^{j+1} \in V$ .

## 6. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ЗА ПРОСТОРОВОЮ ЗМІННОЮ

Для дискретизації задачі за просторовою змінною  $x$  застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ) [14]. Поділимо проміжок  $[0,1]$  на  $N$  однакових частин (скінченних елементів)  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $h = x_{i+1} - x_i = 1/N$ ,  $i = 0, \dots, N$ . За базисні функції виберемо систему кусково-лінійних функцій Куранта  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^N$ . Якщо у напівдискретизоване варіаційне рівняння (14) підставити розвинення апроксимації температури та її швидкості зміни за функціями Куранта у вигляді

$$\begin{cases} \dot{u}^{j+1}(x) \equiv \dot{u}_h^{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{N-1} q_n^{j+1} \varphi_n(x), \\ u^j(x) \equiv u_h^j = \sum_{n=1}^N w_n^j \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0,1], j = 0, \dots, N_T, \end{cases} \quad (15)$$

та по черзі прийняти  $v = \varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , то отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N-1} \{m(\varphi_n, \varphi_k) + \Delta t \rho c(\varphi_n, \varphi_k)\} q_n^{j+1} = - \sum_{n=1}^{N-1} c(\varphi_n, \varphi_k) w_n^j, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

Запишемо систему (16) у матричному вигляді

$$[M + \Delta t \theta C] q^{j+1} = -C w^j, \quad j = 0, \dots, N_T - 1, \quad (17)$$

де

$$M := \{m(\varphi_n, \varphi_k)\}_{n,k=1}^{N-1}, \quad C := \{c(\varphi_n, \varphi_k)\}_{n,k=1}^{N-1}.$$

Отже, маємо повністю дискретизовану задачу теплопровідності вигляду

$$\begin{cases} \text{задано вектор вузлових значень початкового розподілу} \\ \text{температури } w^0 = (w_1^0, \dots, w_{N-1}^0) \in R^{N-1}, \text{ величина} \\ \text{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \text{ та параметра схеми } \rho \in [0,1]; \\ \text{знайти пари векторів } \{q^{j+1}, w^{j+1}\} \in R^{N-1} \times R^{N-1} \text{ такі, що} \\ [M + \Delta t \rho C] q^{j+1} = -C w^j, \\ w^{j+1} = w^j + \Delta t q^{j+1}, \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{cases} \quad (18)$$

Запишемо систему лінійних алгебричних рівнянь (18) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \left[ \frac{h}{6} + \Delta t \rho \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_0^{j+1} + 2 \left[ \frac{h}{3} + \Delta t \rho \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) \right] q_0^{j+1} + \left[ \frac{h}{6} + \Delta t \rho \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_0^{j+1} = 0, \\ \left[ \frac{h}{6} + \Delta t \rho \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_{n-1}^{j+1} + 2 \left[ \frac{h}{3} + \Delta t \rho \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) \right] q_n^{j+1} + \left[ \frac{h}{6} + \Delta t \rho \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_{n+1}^{j+1} \\ = - \left[ \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) q_{n-1}^j + 2 \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) q_n^j + \left( -\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) q_{n+1}^j \right], \quad n = 1, \dots, N-1, \\ q_N^{j+1} = q^*. \end{cases} \quad (19)$$

Для розв'язування повністю дискретизованої задачі (19) застосуємо побудовану ШНМ, яка реалізує мультисітковий метод [6].

### 7. ПОБУДОВА НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Побудуємо двошарову нейронну мережу, яка допускає зворотні зв'язки, тобто обчислення в нейроні поточного шару відбуваються з урахуванням попереднього стану цього ж шару. Мережі такого типу називають рекурентними [6]. Перший шар нейронів  $G^0$  будемо ототожнювати з вузлами дискретизації задачі за просторовою змінною з кроком  $h$ . Другий шар нейронів отримуємо з попереднього шляхом збільшення параметра дискретизації вдвічі. Схематично структуру нейронної мережі зображено на рис. 1.

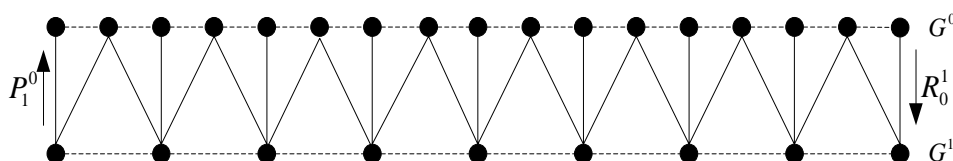


Рис. 1. Структура нейронної мережі.

Міжнейронні зв'язки відбуваються за допомогою лінійних операторів рестрикції та пролонгації. Перехід від точнішої сітки до грубшої визначає оператор рестрикції  $R_0^1 : G^0 \rightarrow G^1$ :

$$\begin{cases} q_0^1 = (R_0^1 Q^0)_0 = \frac{1}{2} \left( q_0^0 + \frac{q_1^0}{2} \right), \\ q_j^1 = (R_0^1 Q^0)_j = \frac{1}{2} \left( \frac{q_{2j-1}^0}{2} + q_{2j}^0 + \frac{q_{2j+1}^0}{2} \right), j = 1, \dots, n-1, \\ q_n^1 = (R_0^1 Q^0)_n = \frac{1}{2} \left( \frac{q_{2n-1}^0}{2} + q_{2n}^0 \right). \end{cases} \quad (20)$$

Перехід у зворотному напрямі визначає оператор вузлової пролонгації  $P_1^0 : G^1 \rightarrow G^0$ :

$$\begin{cases} q_{2j}^0 = (P_1^0 Q^1)_{2j} = q_j^1, j = 0, \dots, n, \\ q_{2j+1}^0 = (P_1^0 Q^1)_{2j+1} = \frac{1}{2} (q_j^1 + q_{j+1}^1), j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (21)$$

Кількість нейронів у першому шарі  $2n+1$ , а в другому –  $n+1$ .

Побудована ШНМ розв'язує систему лінійних алгебричних рівнянь на кожному часовому кроці, реалізуючи мультисітковий метод, алгоритм якого детально описано у [12]. Нейрони першого шару мережі виконують дві функції: згладжування та уточнення розв'язку. Другий шар мережі забезпечує згладжування похибки розв'язку (див. [12]). Побудована нейронна мережа дає змогу економити кількість арифметичних операцій завдяки згладжуванню похибки розв'язку на грубшій сітці та уточнення розв'язку на точнішій. Лінійні оператори рестрикції (20) та пролонгації (21) визначають граф міжнейронних з'єднань і вагові коефіцієнти нейронної мережі [6]. Навчати ШНМ можна шляхом зміни вагових коефіцієнтів. Цільовою функцією



навчання нейронної мережі є мінімізація норми відхилення повністю дискретизованої варіаційної задачі (18). За допомогою цієї функції оцінюємо, наскільки робота ШНМ відповідає бажаному результату.

#### 8. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Наведемо деякі результати, отримані з використанням алгоритму на основі ШНМ, та аналіз знайденого розподілу температурного поля в трансверсально ізотропній пластині залежно від часу за мішаних умов теплообміну на її поверхнях. У табл. 1 наведено наближений розв'язок задачі (5), (7–9) для таких характеристик пластини:

$$\alpha_z = 0,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda_{xx}/\lambda_{zz} = 1; H = 0,01 \text{ м}; H/l = 0,05; T^* = 1; \omega^+ = 1.$$

$$\text{З урахуванням позначень (11) маємо: } b = 0,0025; v = -14/15; u^* = 1.$$

Опишемо результати дослідження впливу кількості нейронів у ШНМ на точність розв'язку. У табл. 1 є фрагмент результатів наближеного розв'язку  $u_h$  у момент часу  $T = 20$  та обчислений поточковий порядок збіжності за просторовою змінною  $P_h$  зі згущенням сітки нейронів удвічі ( $N$  – кількість нейронів першого шару).

Таблиця 1

Порядок збіжності результатів.

$x$	$u_h, N = 51$	$u_h, N = 101$	$u_h, N = 201$	$P_h$
0,60	0,0004189972	0,0004347203	0,0004386787	1,99
0,62	0,0006181596	0,0006401761	0,0006457126	1,99
0,64	0,0009119900	0,0009427336	0,0009504559	1,99
0,66	0,0013454870	0,0013882846	0,0013990223	1,99
0,68	0,0019850387	0,0020444101	0,0020592890	2,00
0,70	0,0029285889	0,0030106309	0,0030311678	2,00
0,72	0,0043206378	0,0044335031	0,0044617235	2,00
0,74	0,0063743704	0,0065288474	0,0065674281	2,00
0,76	0,0094043057	0,0096144849	0,0096669171	2,00
0,78	0,0138744628	0,0141584437	0,0142292058	2,00
0,80	0,0204694238	0,0208499500	0,0209446607	2,01
0,82	0,0301991734	0,0307039688	0,0308294656	2,01
0,84	0,0445537737	0,0452151541	0,0453793911	2,01
0,86	0,0657315590	0,0665845568	0,0667961346	2,01
0,88	0,0969758000	0,0980534799	0,0983204818	2,01
0,90	0,1430713942	0,1443951179	0,1447227029	2,01
0,92	0,2110776486	0,2126385528	0,2130243909	2,02
0,94	0,3114093770	0,3131349230	0,3135609699	2,02
0,96	0,4594318759	0,4611274800	0,4615456542	2,02
0,98	0,6778140423	0,6790636789	0,6793715141	2,02

На підставі аналізу отриманих результатів (див. табл. 1) можна зробити висновок, що зі збільшенням кількості нейронів розв'язок збігається з порядком збіжності  $P_h \approx 2$  (щодо просторової змінної).

Про зміну температури пластини в часі (від параметра  $Fo$ ) дають уявлення графіки на рис. 1. Результати наведено для фіксованої кількості нейронів  $N = 51$ . На цьому рисунку на осі ординат указані значення величини  $u$  ( $\theta/T^*$  при  $z = 0$ ) від безрозмірної координати  $x$  у моменти часу  $T = 10$ ,  $T = 20$ ,  $T = 30$ . Як бачимо, графіки розв'язків при  $T = 10$  і  $T = 20$  практично не відрізняються.

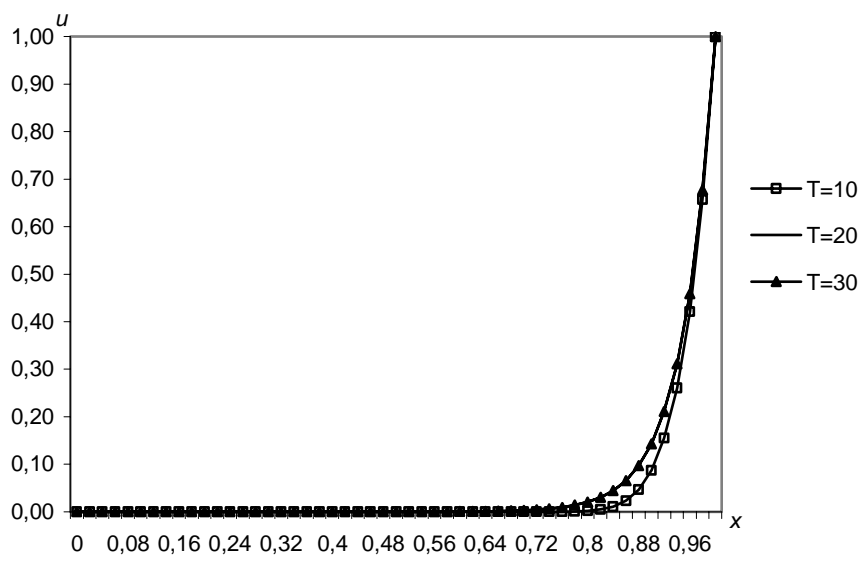
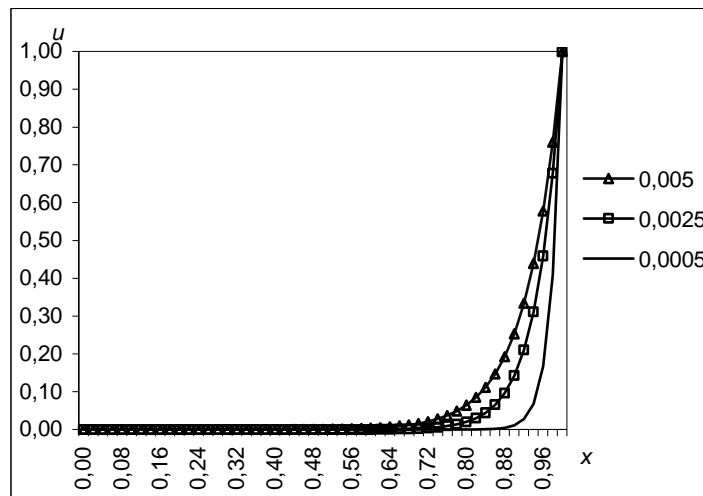


Рис. 2. Залежність зміни температури від часу.

Наведемо аналіз розв'язку задачі (11) залежно від зміни параметра  $\alpha$ . На рис. 3 відображено отриманий розподіл температури в момент часу  $T = 20$  для таких значень коефіцієнта  $\alpha$ : 0,005; 0,0025; 0,0005 ( $\lambda_{xx}/\lambda_{zz} = 2; 1; 0,5$ , відповідно). Обчислення виконано у випадку  $\omega^+ = 1$ , що відповідає значенню  $\beta = -14/15$ . Як бачимо, степінь анізотропії матеріалу, що характеризує параметр  $\lambda_{xx}$ , помітно впливає на температуру в пластині. У досліджуваному випадку більших значень температура досягає ближче до краю  $x = 1$  і різко згасає у напрямі до теплоізолизованого краю  $x = 0$ .

У табл. 2 наведено числові результати, які характеризують розподіл температури у пластині залежно від параметра  $\alpha$  у випадку  $\omega^+ = 1$ , що відповідає значенню  $\beta = -14/15$ .

Рис. 3. Вплив параметра  $\Lambda_{xz}$  на розподіл температури у пластині.

Таблиця 2

Числові результати залежно від параметра  $\alpha$ 

x	$u_h, \alpha = 0,005$	$u_h, \alpha = 0,0025$	$u_h, \alpha = 0,0005$
0,60	0,00416022238	0,00041899722	0,00000001735
0,62	0,00547218421	0,00061815959	0,00000004241
0,64	0,00719788456	0,00091198999	0,00000010364
0,66	0,00946779940	0,00134548705	0,00000025328
0,68	0,01245355147	0,00198503866	0,00000061892
0,70	0,01638088620	0,00292858892	0,00000151240
0,72	0,02154673978	0,00432063776	0,00000369568
0,74	0,02834168980	0,00637437044	0,00000903063
0,76	0,03727948586	0,00940430571	0,00002206688
0,78	0,04903589293	0,01387446284	0,00005392163
0,80	0,06449978425	0,02046942377	0,00013176038
0,82	0,08484034693	0,03019917341	0,00032196337
0,84	0,11159548130	0,04455377368	0,00078673419
0,86	0,14678807780	0,06573155899	0,00192242560
0,88	0,19307896280	0,09697580002	0,00469754603
0,90	0,25396807730	0,14307139420	0,01147869563
0,92	0,33405909860	0,21107764860	0,02804878371
0,94	0,43940751340	0,31140937700	0,06853864679
0,96	0,57797845860	0,45943187590	0,16747771130
0,98	0,76024894510	0,67781404230	0,40924040770
1	1	1	1

На підставі аналізу отриманих результатів можна зробити висновок, що зі зменшенням коефіцієнта  $\alpha$  розв'язок не втрачає стійкості, тобто побудована обчислювальна схема здатна врахувати дуже вузькі ділянки, де розв'язки та їхні градієнти різко змінюються, й не потребує поліпшення внаслідок стабілізації, на противагу іншим методам. У праці [11] виконано порівняння результатів, отриманих за допомогою запропонованої обчислювальної схеми і МСЕ до розв'язування стаціонарних задач адвекції–дифузії з великими числами Пекле.

На рис. 4 зображено вплив критерію Біо на розподіл температури у пластині при  $\alpha = 0.005$  ( $\lambda_{xx} / \lambda_{zz} = 2$ ). Тут наведено результати для  $\omega^+ = 1$  – верхня крива і  $\omega^+ = 2$  – нижня крива ( $\beta = -14/15$  і  $\beta = -16/9$ , відповідно).

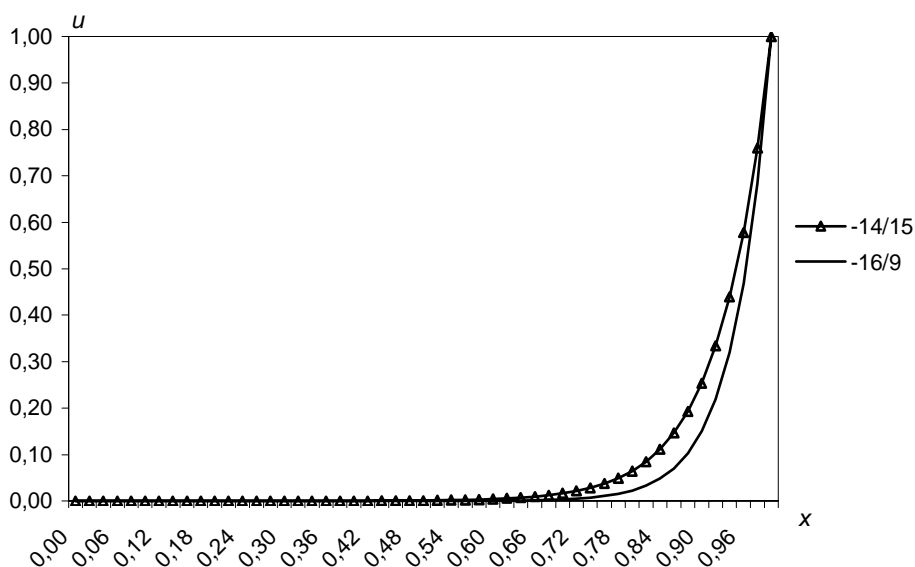


Рис. 4. Вплив критерію Біо на розподіл температури у пластині.

У табл. 3 для порівняння наведено фрагмент числових результатів, які характеризують температуру у пластині з параметром анізотропії матеріалу  $\Lambda_{xz} = 0.005$  для заданих вище значень параметра  $\beta$ .

Таблиця 3

Залежність розв'язку від параметра  $\beta$

$x$	$u_h, \beta = -14/15$	$u_h, \beta = -16/9$
0,60	0,00416022238	0,00050654602
0,62	0,00547218421	0,00074026628
0,64	0,00719788456	0,00108182502
0,66	0,00946779940	0,00158097890

Закінчення табл. 3

0,68	0,01245355147	0,00231044231
0,70	0,01638088620	0,00337648001
0,72	0,02154673978	0,00493438734
0,74	0,02834168980	0,00721111285
0,76	0,03727948586	0,01053831914
0,78	0,04903589293	0,01540069786
0,80	0,06449978425	0,02250657734
0,82	0,08484034693	0,03289110845
0,84	0,11159548130	0,04806706052
0,86	0,14678807780	0,07024519439
0,88	0,19307896280	0,10265631560
0,90	0,25396807730	0,15002192290
0,92	0,33405909860	0,21924201360
0,94	0,43940751340	0,32040024280
0,96	0,57797845860	0,46823286260
0,98	0,76024894510	0,68427542890
1	1	1

## 9. ВИСНОВКИ

Описано випробовування побудованої ШНМ [12], яка реалізує проекційно-сіткову схему мультисітковим методом, на задачі визначення нестационарного температурного поля в трансверсально ізотропній пластині за змішаних умов теплообміну її поверхонь з зовнішнім середовищем. Акцентовано на головних аспектах обчислювальної схеми та особливостях числової реалізації.

Побудовано варіаційне формулювання досліджуваної задачі теплопровідності, для дискретизації якої застосовано проекційно-сіткову схему [14]. Унаслідок дискретизації задачі в часі кусково-лінійними наближеннями отримано однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом. Для дискретизації задачі за просторовою змінною вибирали кусково-лінійні апроксимації у вигляді функцій Куранта. Повністю дискретизовану задачу у вигляді системи лінійних алгебричних рівнянь розв'язували на двошаровій рекурентній нейронній мережі [12]. Навчати ШНМ можна шляхом модифікації вагових коефіцієнтів операторів рестрикції та пролонгації, цільовою функцією навчання є мінімізація відхилення варіаційного рівняння [14]. Отже, на кожному часовому проміжку ШНМ розв'язувала систему лінійних алгебричних рівнянь. Для переходу на наступний часовий проміжок застосовували однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом (14).

Отримані числові результати свідчать про можливість ефективного застосування нейромережевої технології до дослідження нестационарного температурного поля в пластинах за змішаних граничних умов теплообміну з зовнішнім середовищем. Як доводить обчислювальний експеримент, поліпшувати числові результати можна завдяки збільшенню кількості нейронів мережі.

Аналіз отриманих на основі ШНМ результатів дав змогу зробити кількісні та якісні оцінки щодо впливу теплофізичних характеристик, анізотропії матеріалу на

розподіл температури з часом у пластині з урахуванням умов теплообміну з зовнішнім середовищем.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. *Беляев Н. М., Рядко А. А.* Методы теплопроводности: Учебное пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1. М.: Высш. шк., 1982.
2. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. К.: Высш. шк., 1975.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
4. *Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М.* Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. Львів: НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005.
5. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутты // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. Т. 47. № 1. С. 43–62.
6. *Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б.* Штучні нейронні мережі: обчислення // Праці Інституту математики НАН України. Т. 51. К.: Ін-т математики НАН України, 2004.
7. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. К.: Наук. думка, 1980.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовик В. И., Лобзень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К.: Наук. думка, 1977.
9. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, 1976.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
11. *Трушевський В. М., Щербина Н. М.* Наближене розв'язування лінійних крайових задач мультисітковим ітераційним нейронним методом // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 82–98.
12. *Трушевський В., Шинкаренко Г., Щербина Н.* Застосування нейронних мереж до розв'язування задач теплопровідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2007. Вип. 13. С. 135–147.
13. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
14. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991.

**DEFINITION OF THE NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN THE  
PLATE UNDER MIXED CONDITIONS OF HEAT EXCHANGE WITH  
APPLICATION OF NEW ALGORITHM BASED ON ARTIFICIAL NEURAL  
NETWORKS**

**V. Trushevskyy<sup>\*</sup>, G. Shynkarenko<sup>\*\*\*</sup>, N. Shcherbyna<sup>\*\*</sup>**

*<sup>\*</sup>Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska str., 1, Lviv, 79000*

*<sup>\*\*</sup>Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS Ukraine,  
Naukova str., 3-b, Lviv, 79601*

*<sup>\*\*\*</sup>Politechnika Opolska, Luboszycka 5, Opole, 45036, Polska*

The approximated solution for the non-stationary problem of heat conductivity transversally isotropic plate with the mixed boundary conditions of heat exchange is presented. The algorithm on the basis of recurrent neural networks is applied. For research of a temperature field in the thin plate the equations received by a method of approximation of temperature by Legendre's polynomial are used. In this investigation the linear distribution of temperature over the plate thickness and the convective heat exchange with external medium by the Newton law are assumed. Distribution of temperature in time, influence of parameters of anisotropy of the plate material is investigated. The analysis of numerical results is presented.

*Key words:* non-stationary problem, heat conductivity, plate, recurrent neural networks.

*Стаття надійшла до редколегії 16.04.2008  
Прийнята до друку 08.10.2008*