

УДК 532.526

ПРО ДЕЯКІ АЛГЕБРАЇЧНІ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

В. Мамчук

*Національний авіаційний університет
пр-т Космонавта Комарова, 1, м. Київ-58, 03680, e-mail: post@nau-edu.kiev.ua*

Наведено модель та результати з математичного моделювання деяких видів турбулентних пристінних течій. Розрахунки виконано безітераційним скінченнорізницеvim маршовим методом з другим порядком точності за обома координатам. Співставлено розрахункові результати в різних перерізах уздовж розвитку течії з експериментальними даними засвідчують задовільну збіжність.

Ключові слова: примежовий шар, турбулентна пристінна течія (струмінь), профіль швидкості, маршовий метод, сплайн.

1. ВСТУП

Математичне моделювання складних турбулентних пристінних течій, які виникають у разі застосування пристроїв і транспортних засобів, що використовують крило як рушій або несучий елемент чи елемент керування, не можливе без розуміння природи розвитку течії в примежовому шарі (ПШ). Примежові ж пристінні струмені – один з ефективних засобів керування ПШ, що широко застосовують в аерогідродинаміці. З математичного погляду розрахунок таких течій – це серйозна проблема і досі [1–10], оскільки в практичних задачах їх необхідно розглядати як турбулентні, а характеристики турбулентності значно залежать від геометрії притаманного пристінному струменю немонотонного профілю поздовжньої складової осередненої швидкості. Крім того, реальна обтічна поверхня має певні особливості (кривина, шорсткість тощо) і, взаємодіючи з потоком, впливає на формування пристінної струменевої течії.

Проаналізуємо математичне моделювання турбулентних стаціонарних нестисливих примежових шарів та пристінних струменів, що розвиваються вздовж поверхонь, які можуть бути гладкими або шорсткими: шорсткість розглядаємо у вигляді канавок квадратної форми, розташованих паралельно або перпендикулярно до напрямку розвитку течії, що є одним з наукових напрямів автора. Наша мета – висвітлення доробок на шляху вдосконалення розрахункових методів і математичної моделі [1], яка має деякі переваги перед іншими, так, щоб вона описувала якомога більше видів турбулентних пристінних течій.

2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗГЛЯДУВАНИХ ВИДІВ ТЕЧІЙ

ПШ є одним з найпоширеніших видів течії в'язкої рідини, система диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує його та пристінний струмінь, має вигляд

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

де u, v – проекції швидкості на осі Ox та Oy , відповідно.

Високоєфективний безітераційний метод розрахунку системи рівнянь (1), який ґрунтується на різницевій схемі з підвищеними стабілізаційними властивостями, описано в роботі [2]. У праці виконано дослідження з адаптації цього методу на зазначені вище розрахункові випадки.

Однією з найдовершеніших моделей, що достатньо повно та суттєво враховує накопичені відомості про структуру та властивості деяких видів пристінних течій та процеси турбулентного перемішування в них, є модель турбулентної в'язкості, запропонована в роботі [1].

Оскільки профіль осередненої швидкості для течії, яку вивчаємо, має складну форму, то для описування коефіцієнта турбулентної в'язкості μ_t на першому етапі для кожної з ділянок використовували співвідношення з праць [1–5]:

для початкової ділянки

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_H \gamma \text{th} \frac{\ell \sqrt{\bar{\tau}}}{\chi \delta u_H / v_*}, \quad \ell = k y \text{th} \frac{\text{sh}^2(\chi_1 y^+) \text{th}(\text{sh}^2(\chi_2 y^+))}{k y \sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (2)$$

для струменевої та слідової ділянок

$$\mu_t = \begin{cases} \rho \chi_{\text{ст}} \delta_{\text{ст}} (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) \gamma & \text{при } \delta_{\text{max}} \leq y \leq \delta_1, \\ \rho \chi_{\text{сл}} \delta_{\text{сл}} (u_{\text{min}} - u_h) \gamma & \text{при } \delta_1 < y \leq \delta; \end{cases} \quad (3)$$

де k, χ, χ_1, χ_2 – коефіцієнти моделі; δ – товщина прилежого шару або пристінного струменя; ℓ – довжина ділянки змішування; ρ – густина; u_H – значення швидкості на зовнішній межі ПШ (струменя); $\bar{\tau}$ – безрозмірне напруження тертя в околі стінки:

$$\bar{\tau} = \begin{cases} 1 + \Phi_1 \eta & \text{при } \Phi_1 \geq 0, \\ 1 / (1 - \Phi_1 \eta) & \text{при } \Phi_1 < 0; \end{cases} \quad \Phi_1 = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} - \text{формпараметр К.К.Федяєвського;}$$

p – тиск; τ_w – значення дотичного напруження тертя на поверхні; $\eta = y / \delta$; $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамічна швидкість; $y^+ = y v_* \rho / \mu$; $\gamma = \sqrt{1 - \eta}$ – функція, яка враховує переміжність течії; $\chi_{\text{ст}}, \chi_{\text{сл}}$ – емпіричні сталі моделі; $\delta_{\text{ст}}$ і $\delta_{\text{сл}}$ – товщини струменевої та слідової ділянок, відповідно.

За k приймали відому формулу з [9]: $k = 0,4 + 0,182275(1 - \exp(-0,32068\Phi_1))$.

Коефіцієнти χ, χ_i брали з [1–5].

У рамках розрахункового методу виявилась доцільною модифікація, пов'язана з використанням сплайнів для задання початкових та граничних умов на зовнішній межі турбулентного ПШ, зокрема в [9] вони з успіхом застосовані для інтерполяції табличної функції, яка описує форму профілю рила літака.

Числові розрахункові експерименти засвідчили, що співвідношення (2) із [1] можна використовувати тільки для певних, головню, безградієнтних ПШ (у цьому випадку від нього можна взагалі відмовитися, застосовавши “стару” модель

Прандтля, оскільки $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sh} \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{th} \alpha}{\alpha} = 1$), тоді як (3) застосовне і для моделювання

пристінного струменя. Для багатьох практичних задач необхідно моделювати течії,

які розвиваються в діапазоні від значних додатних до від'ємних градієнтів тиску. Зокрема, практично найцікавішим є дослідження течій, що формуються під впливом значних додатних градієнтів тиску, які приводять до виникнення небажаного на практиці явища відриву турбулентного ПШ. Тому для поширення можливостей моделі (2–3) щодо використання її для ширшого кола прикладних задач необхідні додаткові дослідження й уточнення деяких залежностей модельних коефіцієнтів від параметрів течії, що враховують градієнт тиску. Це виконано на наступних етапах числових експериментів.

Для цього проводили модифікації не лише коефіцієнтів моделі (2–3), а й її структури. Числові експерименти, виконані, за викладеною методикою, дали змогу у випадку обчислення характеристик градієнтних течій у першому наближенні запропонувати такі формули:

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_H \gamma \ln \left(\frac{\ell \sqrt{\tau}}{\chi \delta u_H / v_*} + 1 \right), \ell = ky; \quad (4)$$

$$k = 0,223 + 0,12 \operatorname{arctg} \frac{du_H}{dx}, \quad \chi = 0,01 + \frac{1}{75 + (2,5 + \Phi_1)^2}. \quad (5)$$

Попередні розрахунки порівнювали з відомим експериментальним матеріалом [6] та [10] і вони дали обнадійливі результати, що допомогло зробити висновок про доцільність продовження числових експериментів для уточнення формул (4) – дає можливість уникнути використання емпіричних коефіцієнтів χ_1 і χ_2 , та (5) з використанням більш широкого обсягу експериментального матеріалу. Крім того проведено числові експерименти і за формулою (2), що дало змогу вже на теперішньому етапі для k запропонувати формулу (5), у якій перший числовий доданок у правій частині заміняли на 0,4, та формулою (4), в якій ℓ брали з (2). Завдяки цьому дещо поліпшено розрахункові результати. Такі ж експерименти проводять за формулою, аналогічною до (2), у якій \ln замінюють на arctg але, відповідно, з іншими модельними коефіцієнтами k , χ , χ_1 , χ_2 .

Результати обчислень порівнювали з результатами інших авторів, зокрема [1], що мають перевагу над іншими і продемонстрували точнішу відповідність розрахункових значень експериментальним даним, а отже, підтвердили доцільність запропонованих вище модифікацій.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТУВАННЯ

На рисунках розрахунків прийнято єдиний принцип відображення розрахункової інформації для наведення результатів моделювання, а саме: зроблено порівняння розрахованих розподілів швидкості $\bar{u}(y)$ ($\bar{u} = u/u_H$, $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$, $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})|_{x=x_0}$ – початкові умови, L – характерний розмір обтічної поверхні) з наявними з експериментальних робіт вимірними профілями швидкості в різних перерізах уздовж напрямку розвитку ПШ чи пристінного струменя. Таке порівняння локальних розподілів швидкості має перевагу над порівнянням розподілів уздовж координати x інтегральних характеристик

$$\left(\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_H}\right) dy\right) \text{ – товщина витіснення та } \left(\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{u_H} \left(1 - \frac{u}{u_H}\right) dy\right) \text{ – товщина втрати}$$

імпульсу), які на кожному кроці знаходили за допомогою квадратурної формули Сімпсона, досліджуваних течій, оскільки дає змогу простежити характер відтворення розрахунковим методом деформації профілю швидкості під впливом умов розвитку течії. Розрахунки обох течій виконали за власною моделлю турбулентності.

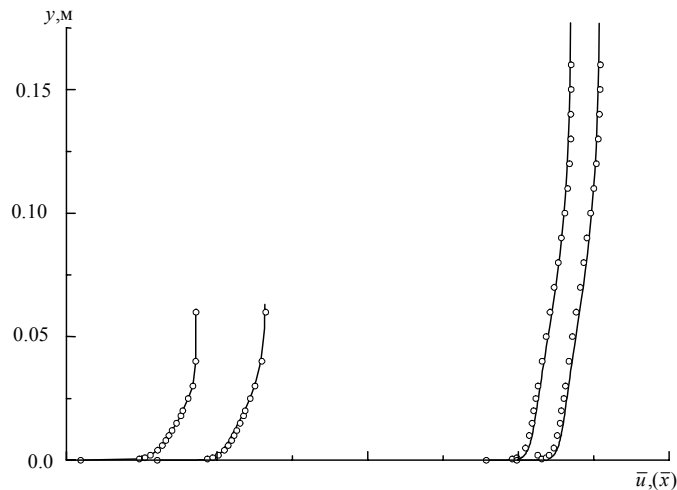


Рис. 1. Розподіл швидкості $\bar{u} = f(y)$ у поздовжніх перерізах $\bar{x} = \text{const}$:
лінії – розрахунки; кола – експериментальні дані (id. 1100) [10]

На рис. 1 показано порівняння, яке засвідчує практично точне відтворення тенденцій деформації профілів швидкості вздовж координати \bar{x} , що простежувалися експериментально у розвитку примежового шару id. 1100 – незрівноважена течія, що формується під впливом додатного градієнта тиску (Г. Людвіг, В. Тіллман).

Сліди, що утворюються за окремими елементами крила, розташованими над обтічною поверхнею, взаємодіють з ПШ на його поверхні. Математичне моделювання такої взаємодії сліду з ПШ становить особливу практичну цінність, оскільки воно необхідне для оптимізації форми профілю крила, передкрилка та закрилка. Крім того, дослідження механізмів взаємодії має важливе значення для поглибленого розуміння природи турбулентності.

Тому на рис. 2 показано результати порівняння числових розрахунків з експериментальними даними [6] – взаємодії сліду з ПШ: слід є результатом злиття ПШ, що утворилися на верхній і нижній поверхнях симетричного профілю NASA 0012 (довжина хорди – 100 мм, d – висота щілини між обтічною поверхнею і профілем), встановленим під нульовим кутом атаки. Зазначимо, що і в цьому випадку застосовані модель і метод дали змогу фізично коректно змоделювати головні властивості, притаманні розглянутому різновиду пристінної течії, що підтверджується відтворений шляхом розрахунку поступовий перехід від

немонотонних профілів швидкості, характерних для пристінних струменів, до монотонних розподілів їх, притаманних ПШ.

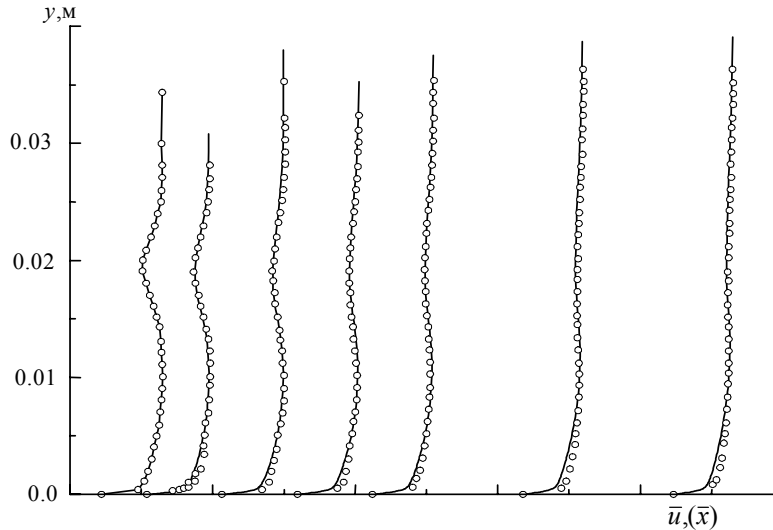


Рис. 2. Розподіл швидкості $\bar{u} = f(y)$ в сліді за профілем NACA 0012, що занурений у турбулентний примежовий шар гладкої поверхні у поздовжніх перерізах $\bar{x} = \text{const}$: лінії – розрахунки; кола – експериментальні дані [6]

Для показаних на рис. 1, 2 порівнянь досягнуто задовільної відповідності розрахункових і експериментальних розподілів швидкості. Це доводить працездатність використаної моделі та підходів у разі моделювання розглянутих видів турбулентних пристінних течій.

4. ВИСНОВКИ

Отже, порівняння розрахункових результатів з відомими експериментальними даними засвідчують, що запропоновані підходи з математичного моделювання розглянутих видів турбулентних течій дають змогу моделювати течії адекватно їхнім фізичним властивостям.

Розроблена математична модель для розрахунку турбулентних ПШ і пристінних струменів дає змогу розраховувати і такий складний та практично цінний різновид течії, як слід за тілом, розташованим у ПШ гладкої поверхні, а це дає підстави сподіватися на подальші узагальнення запропонованих підходів на складніші різновиди течій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мовчан В. Т., Захарюгин Б. Д. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе единого представления турбулентной вязкости поперек пограничного слоя // Прикл. аэродинамика. 1979. С. 38–44.
2. Мамчук В.І. Модель турбулентності та результати розрахунків плоских турбулентних пристінних струменів // Вісн. КМУЦА. 1998. № 1. С. 291–294.

3. Лунис М., Мамчук В.И., Мовчан В.Т. и др. Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений // Прикл. гідромеханіка. 2001. Т. 3 (75). №1. С. 37–45.
4. Мамчук В.И. Математичне моделювання розвитку турбулентних прилежових шарів та пристінних струменів на пластинах, які коливаються // Наук. вісті НТУУ КПІ . 2002. 4(24). С. 65–67.
5. Мамчук В.И. Математичне моделювання розвитку турбулентних пристінних течій на тілах, які коливаються // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2002. Вип. 4. С. 131–136.
6. Тулапуркара Э.Г., Рамжи В., Раджасекар Р. Взаимодействие пограничного слоя со следами тел различной формы // Аэрокосм. техника. 1990. № 12. С. 3–10.
7. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
8. Хорстмен. Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления // Ракет. техника и космонавтика. 1977. Т. 15, № 2. С. 5–7.
9. Ahlbery J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. Theory of Splines and Their Applications. New York, 1967
10. Ed.Kline S.I., Morcovin M.V., Sovran G., and other. Computation of turbulent boundary layer // Proceedings AFOSR-IFR-Stanford Conference. Vol. 1. 1968. Vol. 2. Ed. Coles D.E., Hirst E.A. 1969. 519 p.

ABOUT SOME ALGEBRAIC MODELS OF TURBULENCE

Vitaliy Mamchuk

National University of Aviation

Cosmonaut Komarov pr., 1, Kyiv-58, 03680, e-mail: post@nau-edu.kiev.ua

The pattern and results of mathematical modeling of some types of turbulent near the wall flows are given. The calculations are made by uniterative certainly-incremental mid-flight method with the second order of accuracy by both coordinates. The carried out comparisons of calculation results in different cross-sections along the flow growth with the experimental data demonstrate satisfactory convergence.

Key words: boundary layer, turbulent near the wall flow, velocity profile, mid-flight method, spline.

Стаття надійшла до редколегії 03.06.2006

Прийнята до друку 12.09.2007