ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Сер. прикл. матем. та інформ.
2007. Вип. 13. С. 51–58

VISNYK LVIV UNIV
Ser. Appl. Math. Comp. Sci.
2007. No 13. P. 51–58

УДК 519.21:519.61

ПРО РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД З НАДКВАДРАТИЧНОЮ ЗБІЖНІСТЮ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО НАЙМЕНШІ КВАДРАТИ

С. Шахно, О. Гнатишин, Р. Якимчук

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: ktop@franko.lviv.ua

Досліджено ітераційно-різницевий метод розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати, який не потребує обчислення матриці похідних. Доведено теорему, яка обгрунтовує збіжність, та визначено швидкість збіжності розглянутого методу. Наведено результати числового експерименту.

Ключові слова: нелінійна задача про найменші квадрати, ітераційно-різницеві методи, поділені різниці, швидкість збіжності, відхил.

1. ВСТУП

Нелінійна задача про найменші квадрати є частковим випадком безумовної оптимізації. З огляду на важливість та специфічну структуру ця задача становить самостійний інтерес для дослідження. Такі задачі найчастіше виникають у разі розв'язування перевизначених систем рівнянь, оцінювання параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, побудови нелінійних регресійних моделей, розв'язування інженерних проблем тощо. Ефективним методом розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати є метод Гаусса–Ньютона [4] та його модифікації [1, 2, 6]. Часто на практиці маємо проблеми з обчисленням похідних. Наприклад, функцію отримуємо з експерименту, і не маємо аналітичного виразу для похідних, або похідну функції може задавати громіздка формула, і її обчислення є небажаним. У такому випадку доцільно використовувати ітераційно-різницеві методи, які не потребують обчислення матриці похідних і водночас не поступаються методу Гаусса–Ньютона за швидкістю збіжності та близькі до нього за кількістю обчислень.

У праці [6] з єдиного погляду досліджено швидкість та радіус збіжності різницевих методів хорд, симетричної різницевої лінеаризації та методу з порядком збіжності $1{,}839\ldots$. За аналогічною схемою пропонуємо дослідження двокрокового різницевого методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$. Цей метод запропоновано і досліджено в [1]. Однак обґрунтування збіжності, наведене нижче, потребує слабших обмежень на функцію, зокрема не потрібне існування й обмеженість поділених різниць другого порядку, не припускаємо рівним нулю відхил у розв'язку.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нелінійна задача про найменші квадрати має вигляд

$$\min_{x\in R^n} f(x) = \min_{x\in R^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \tag{1}$$

де $m \geq n,$ функція відхилу $F : R^n \to R^m$ – нелінійна за x.

Для знаходження розв'язку задачі (1) розглянемо різницеву модифікацію двокрокового методу Гаусса–Ньютона [1]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,... \end{aligned} \tag{2}$$

де $A_n = F(x_n, y_n)$ – поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ [5] в точках x_n, y_n; x_0, y_0 – задані початкові наближення.

3. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

Достатні умови і швидкість збіжності ітераційного процесу (2) визначені в такій теоремі.

Теорема. Нехай $F : R^n \to R^m$ – неперервно диференційована в області $D \subseteq R^n$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок x_* у деякій області $\Omega(x_*, r_0) = \{x \in D : \| x - x_* \| < r_0\}$, де $r_0 = \max\{\| x_0 - x_* \|, \| y_0 - x_* \|\}$ та існує обернений оператор $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x_*)^T F'(x_*)]^{-1}$ і $\| (A_*^T A_*)^{-1} \| \leq B$. В області Ω функція F має поділені різниці першого порядку і

$$\| F(x, y) - F(u, v) \| \leq M(\| x - u \| + \| y - v \|).$$

Крім того,

$$\| F(x_*) \| \leq \eta, \ \| F'(x_*) \| \leq \alpha;$$

$$3BMr_0(\alpha + 2Mr_0) + 2MB\eta < 1;$$

$$q = \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0 + 2C_2) + 2C_2\} < 1,$$

де

$$C_1 = \frac{BM(\alpha + 2Mr_0)}{1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)}; \ C_2 = \frac{2BM\eta}{1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)}.$$

Тоді для $x_0, y_0 \in \Omega$ ітераційний процес (2) є коректно визначеним і генеровані ним послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}, n = 0,1,...,$ містяться у відкритій області Ω та збігаються до розв'язку x_*, причому справджуються оцінки:

$$\| x_{n+1} - x_* \| \leq C_1 \| x_n - x_* \| \| y_n - x_* \| + C_2(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|); \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \| y_{n+1} - x_* \| \leq C_1(\| x_{n+1} - x_n \| + \| y_n - x_* \|) \| x_{n+1} - x_* \| + \\ + C_2(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|); \end{aligned} \tag{4}$$

$$r_{n+1} = \max\{\| x_{n+1} - x_* \|, \| y_{n+1} - x_* \|\} \leq q r_n \leq ... \leq q^{n+1} r_0. \tag{5}$$

Доведення. Для довільної матриці $A \in R^{n \times m}$, яка має повний стовпцевий ранг, справджується тотожність

$$\| [I - (I - (F_*'^T F_*')^{-1} A^T A)]^{-1} \| = \| (A^T A)^{-1} F_*'^T F_*' \|. \tag{6}$$

Зробимо таку оцінку

$$\begin{aligned}&\| I-(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}A^TA\| = \|(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}(F_*^{'T}F_*^{'}-A^TA)\| =\\&=\|(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}(F_*^{'T}(F_*^{'}-A)+(F_*^{'T}-A^T)(A-F_*^{'})+(F_*^{'T}-A^T)F_*^{'})\| \le\\&\le \|(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}\|(\|F_*^{'T}\|\|F_*^{'}-A\|+\|F_*^{'T}-A^T\|\|A-F_*^{'}\|+\|F_*^{'T}-A^T\|\|F_*^{'}\|)\le\\&\le B(\alpha\|F_*^{'}-A\|+\|F_*^{'T}-A^T\|\|A-F_*^{'}\|+\alpha\|F_*^{'T}-A^T\|).\end{aligned}\tag{7}$$

Зважатимемо, що

$$\begin{aligned}&\|A_n-A_*\|=\|F(x_n,y_n)-F(x_*,x_*)\|=\\&=\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)+F(x_n,x_*)-F(x_*,x_*)\|\le\\&\le\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)\|+\|F(x_n,x_*)-F(x_*,x_*)\|\le\\&\le M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\end{aligned}$$

і для евклідової норми [4] $\|F_*^{'}-A_n\|=\|F_*^{'T}-A_n^T\|$. Тоді з нерівності (7) з $A_n=F(x_n,y_n),\ A_*=F^{'}(x_*)=F(x_*,x_*)$ отримаємо

$$\begin{aligned}&\|I-(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}A^TA\|\le B[2\alpha+M(\|y_n-x_*\|+\\&+\|x_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|).\end{aligned}\tag{8}$$

Оскільки згідно з умовою

$$4B(\alpha+Mr_0)Mr_0=1-3BMr_0(\alpha+2Mr_0)-2\eta MB<1,$$

то за теоремою Банаха з (6) і (8) маємо

$$\|(A_n^TA_n)^{-1}F_*^{'T}F_*^{'}\|\le\{1-B[2\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}^{-1}.$$

У підсумку отримаємо оцінки

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x_*\|=\|x_n-x_*-(A_n^TA_n)^{-1}(A_n^TF(x_n)-A_*^TF(x_*))\|\le\\&\le\|-(A_n^TA_n)^{-1}F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*)\|\|(F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*))^{-1}[-A_n^T(A_n-\\&\qquad-F(x_n,x_*))(x_n-x_*)+(A_n^T-A_*^T)F(x_*)]\|,\\&\|y_{n+1}-x_*\|=\|x_{n+1}-x_*-(A_n^TA_n)^{-1}(A_n^TF(x_{n+1})-A_*^TF(x_*))\|\le\\&\le\|-(A_n^TA_n)^{-1}F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*)\|\|(F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*))^{-1}[-A_n^T(A_n-\\&\qquad-F(x_{n+1},x_*))(x_{n+1}-x_*)+(A_n^T-A_*^T)F(x_*)]\|.\end{aligned}$$

Звідси з урахуванням нерівностей

$$\begin{aligned}&\|A_n-F(x_n,x_*)\|=\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)\|\le M\|y_n-x_*\|,\\&\|A_n-F(x_{n+1},x_*)\|=\|F(x_n,y_n)-F(x_{n+1},x_*)\|\le M(\|x_n-x_{n+1}\|+\|y_n-x_*\|),\\&\|A_n\|\le\|A_*\|+\|A_n-A_*\|\le\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|),\end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x_*\|\le B\{[\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)]M\|x_n-x_*\|\|y_n-x_*\|+\\&\quad+\eta M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}/\{1-B[2\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\\&\quad+\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\};\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\|y_{n+1}-x_*\|\le B\{[\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_{n+1}\|+\|y_n-x_*\|)\times\\&\quad\times\|x_{n+1}-x_*\|+\eta M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}/\{1-B[2\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\\&\quad+\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|),\end{aligned}\tag{10}$$

тобто правильні оцінки (3), (4).

Використаємо умову $q<1$ і нерівності (3), (4), тоді при $n=0$, маємо

$$r_1 = \max\{\| x_1 - x_* \|, \| y_1 - x_* \|\} \le \max\{C_1 \| x_0 - x_* \| \| y_0 - x_* \| + C_2(\| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|);$$
$$C_1(\| x_1 - x_* \| + \| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|) \| x_1 - x_* \| + C_2(\| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|)\} \le$$
$$\le \max\{C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0) + 2C_2 r_0\} =$$
$$= \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0 + 2C_2 + 2)(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0) + 2C_2\} r_0 = q r_0,$$

тобто $x_1, y_1 \in \Omega$ і справджується нерівність (5).

Далі, за допомогою методу математичної індукції, легко довести, що $x_{n+1}, y_{n+1} \in \Omega$, і отримати оцінку (5) для довільного $n \ge 1$. □

Як бачимо з оцінок (9) і (10), збіжність ітераційного процесу суттєво залежить від доданка, який містить величини η і M. Якщо $\eta = 0$, то маємо нелінійну задачу найменших квадратів з малим відхилом у розв'язку. У разі $M = 0$ функції відхилу лінійні. Для задач з малим відхилом у розв'язку (η – "мале") або слабко нелінійних задач (M – "мале") збіжність ітераційного процесу лінійна. У разі великих відхилів (η – "велике") або для сильно нелінійних задач (M – "велике") ітераційний процес (2) може взагалі не збігатися.

Для задач з нульовою нев'язкою в розв'язку можна отримати кращі оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу (2).

Наслідок. Порядок збіжності ітераційного процесу (2) у випадку нульового відхилу дорівнює $1+\sqrt{2}$.

Доведення. Введемо позначення $a_n = \| x_n - x_* \|, b_n = \| y_n - x_* \|, n = 0,1,\ldots$. Із нерівностей (9) і (10) отримаємо

$$a_{n+1} \le \frac{B[\alpha + M(a_n + b_n)]M}{1 - B[2\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_n + b_n)} a_n b_n;$$
$$b_{n+1} \le \frac{B[\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_{n+1} + a_n + b_n)}{1 - B[2\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_n + b_n)} a_{n+1}.$$

Приймемо

$$A = \frac{B[\alpha + M(a_0 + b_0)]M}{1 - B[2\alpha + M(a_0 + b_0)]M(a_0 + b_0)}; \quad C = A\bigl(2 + A\bigl(2a_0 + b_0\bigr)\bigr); \quad E = AC.$$

Тоді для достатньо великого $n \in N$

$$a_{n+1} \le A a_n b_n,$$
$$b_{n+1} \le A(a_{n+1} + a_n + b_n)a_{n+1} \le A(2a_n + b_n)a_{n+1} \le A(2a_n + A(a_n + a_{n-1} + b_{n-1})a_n)a_{n+1} \le$$
$$\le A(2 + A(2a_0 + b_0))a_{n+1}a_n = C a_{n+1} a_n,$$

звідки

$$a_{n+1} \le A a_n b_n \le A a_n C a_n a_{n-1} = E a_n^2 a_{n-1}.$$

На підставі попередньої нерівності можна записати рівняння для визначення порядку збіжності ітераційного процесу (2)

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Порядком збіжності буде єдиний додатний корінь $t_* = 1 + \sqrt{2}$ цього рівняння.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

На низці тестових прикладів порівняємо швидкість збіжності методу (2) з методом Гаусса–Ньютона та методом хорд. Ітераційні формули цих методів отримаємо з

$$x_{n+1} = x_n - \left(A_n^T A_n\right)^{-1} A_n^T F(x_n),\ n = 0,1,... \quad (11)$$

Якщо в (11) A_n – матриця перших похідних функції $F(x_n)$, то маємо метод Гаусса–Ньютона, якщо ж $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ – матриця поділених різниць першого порядку функції F в точках x_n і x_{n-1}, то маємо аналог методу хорд.

Значення матриці поділених різниць обчислюємо за формулою [3]

$$F(x,y)_{i,j} = \frac{F_i(x_1,...,x_j,y_{j+1},...,y_n) - F_i(x_1,...,x_{j-1},y_j,...,y_n)}{x_j - y_j}, (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n) \quad (12)$$

У разі практичної реалізації методу (2) на кожній ітерації потрібно розв'язувати дві системи лінійних рівнянь зі спільною матрицею і різними правими частинами.

Додаткові початкові наближення будуємо за правилом $y_0 = x_0 + 10^{-4}$. Результати шукаємо з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$.

Тестування проводили на наступних функціях:

Приклад 1. Функція Розенброка [8]:

$n = 8,\ m = 8;$

$F_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2),\ F_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1},\ i = 1,2,...,n/2;$

$x_* = (1;1;1;1;1;1;1;1)$; $x_0 = (-1.2;1;-1.2;1;-1.2;1;-1.2;1)$; $f(x_*) = 0$.

Приклад 2. Функція Вуда [8]:

$n = 4,\ m = 6;$

$F_1(x) = 10(x_2 - x_1^2),\ F_2(x) = 1 - x_1,\ F_3(x) = (90)^{1/2}(x_4 - x_3^2),$

$F_4(x) = 1 - x_3,\ F_5(x) = (10)^{1/2}(x_4 + x_2 - 2),\ F_6(x) = (10)^{-1/2}(x_2 - x_4);$

$x_0 = (-3,-1,-3,-1);\ x_* = (1, 1, 1, 1);\ f(x_*) = 0.$

Приклад 3. Функція Box-3D [8]:

$n = 3,\ m = 9;$

$F_i(x) = e^{-t_i x_1} - e^{-t_i x_2} - x_3\left(e^{-t_i} - e^{-10 t_i}\right)$, де $t_i = 0.1i$, $i = 1,...,9;$

$x_0 = (0;10;20);\ x_* = (1;10;1);\ f(x_*) = 0$.

Приклад 4. Сингулярна функція Пауелла [8]:

$n = 4,\ m = 4;$

$F_1(x) = x_1 + 10x_2,\ F_2(x) = \sqrt{5}\,(x_3 - x_4),$

$F_3(x) = (x_2 - 2x_3)^2,\ F_4(x) = (10)^{1/2}(x_1 - x_4)^2;$

$x_0 = (3;-1;0;1);\ x_* = (0;0;0);\ f(x_*) = 0$.

Приклад 5. Функція Брауна [8]:

$n = m;$

$F_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j - n - 1,\ \ i = 1,2,...,n-1,\ \ F_n(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j - 1;$

$x_0 = (0.5;...,0.5)$;

$x_* = (\alpha;...,\alpha;\alpha^{1-n})$, де α задовольняє умові $n\alpha^n - (n+1)\alpha^{n-1} + 1 = 0$;

$f(x_*) = 0$.

Приклад пораховано при значенні $n = m = 4$ і отримано розв'язок методом Гаусса-Ньютона $x_* = (0.868877;\ 0.868877;\ 0.868877;\ 1.524492)$,.тобто $\alpha = 0.868877$, а методами хорд та (2) отримано значення $x_* = (1.0;\ 1.0;\ 1.0;\ 1.0)$**,** тобто $\alpha = 1$.

Приклад 6. Функція Ковалика і Осборна [8]:

$n = 4,\ \ m = 11;$

$$F_i(x) = y_i - \frac{x_1\left(u_i^2 + u_i x_2\right)}{\left(u_i^2 + u_i x_3 + x_4\right)},$$

де

i	y_i	u_i	i	y_i	u_i
1	0.1957	4.0000	7	0.0456	0.1250
2	0.1947	2.0000	8	0.0342	0.1000
3	0.1735	1.0000	9	0.0323	0.0833
4	0.1600	0.5000	10	0.0235	0.0714
5	0.0844	0.2500	11	0.0246	0.0625
6	0.0627	0.1670			

$x_0 = (0.25;0.39;0.415;0.39)$;

$x_* = (0.1928...;0.1912...;0.1230...;0.1360...)$;

$f(x_*) = 3.07505...\times 10^{-4}$.

Приклад 7. Розподіл Гнеденка – Вейбулла:

$n = 2,\ \ m = 8;$

$$F_i(x) = 1 - e^{-\left(\frac{t_i}{x_1}\right)^{x_2}} - y_i,$$

i	t_i	y_i	i	t_i	y_i
1	0.1000	0.0050	5	1.2000	0.5132
2	0.5000	0.1175	6	1.7000	0.7643
3	0.7000	0.2173	7	2.2000	0.9111
4	1.0000	0.3939	8	4.5000	0.9996

$x_0 = (1;1);\ \ x_* = (1.4140;2.000);\ \ f(x_*) = 1.3833\times 10^{-7}.$

Приклад 8. Функція Фрейденштейна і Роса [8]:

$n = 2,\ \ m = 2;$

$F_1(x) = -13 + x_1 + ((5 - x_2)x_2 - 2)x_2,$

$F_2(x) = -29 + x_1 + ((x_2 + 1)x_2 - 14)x_2;$

$x_0 = (0.5; -2);\quad x_* = (5; 4);\quad f(x_*) = 0$.

В таблиці 1 наведено результати числового експерименту, зокрема ми порівнюємо досліджувані методи за кількістю ітерацій, зроблених для знаходження розв'язку з заданою точністю.

Таблиця 1

Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок тестових задач

Номер прикладу	Метод		
	Гаусса–Ньютона	хорд	(2)
1	2	3	2
2	51	74	49
3	5	7	4
4	12	16	10
5	14	12	13
6	10	17	10
7	5	6	4
8	44	19	8

5. ВИСНОВКИ

Отже, на підставі теоретичних досліджень, практичних розрахунків та порівняння отриманих результатів можна стверджувати, що двокроковий ітераційно-різницевий метод (2) збігається швидше, ніж метод Гаусса–Ньютона, та значно переважає метод хорд. Оскільки, як доведено, у випадку нульового відхилу метод має високий порядок збіжності ($1+\sqrt{2}$) та не потребує обчислення похідних, то розглянутий метод є ефективним методом розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бартіш М.Я., Чипурко А.І.* Про одну модифікацію методу Гаусса–Ньютона // Матем. студії. 1998. Т. 10. № 1. С. 85–92.
2. *Бартіш М.Я., Чипурко А.І., Шахно С.М.* Про одну модифікацію методу Гаусса–Ньютона // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 42. С. 35–38.
3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
4. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
5. *Ульм С.,* Об обобщенных разделенных разностях // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. 1967. Т. 16. С. 13–26.
6. *Shakhno S.M., Gnatyshyn O.P.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving the nonlinear least squares problems // AMC (Appl. Math. Comp.) 2005. Vol. 161. P. 253–264.
7. *Shakhno S.M.* Method of $1+\sqrt{2}$ order for the solution of nonlinear equation with Holder continuous divided differences // Proc. Appl. Math. Mech. 2005. Vol. 4. P. 779–780.
8. *More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E.* Testing Unconstrained Optimization Software // ACM Transactions on Mathematical Software. 1981. Vol. 7. № 1. P. 17–41.

ON THE DIFFERENCE METHOD WITH SUPERQUADRATIC CONVERGENCE FOR SOLVING NONLINEAR LEAST SQUARE PROBLEMS

S. Shakhno, O. Gnatyshyn, R. Yakymchuk

Ivan Franko National University of L'viv
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: ktop@franko.lviv.ua

One iterative-difference method for solving nonlinear least square problem, which do not demand evaluation of derivatives is presented. We have proved theorem where convergence of the proposed method is justified and rate of convergence is established. Numerical results are presented.

Keywords: nonlinear least square problem, iterative–difference method; divided differences; rate of convergence, residual.

Стаття надійшла до редколегії 05.08.2007
Прийнята до друку 05.09.2007