

**ЧИСЛОВА ЕФЕКТИВНІСТЬ ГІБРИДНИХ
СКІНЧЕННО-ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ
ПРУЖНОСТІ НА ПІДСТАВІ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ**

І. Дияк, І. Макар, І. Прокопишин

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000,
e-mail: dyyak@franko.lviv.ua*

Проаналізовано числову ефективність деяких гетерогенних числових схем розв'язування плоскої задачі теорії пружності з використанням методів скінченних і граничних елементів на підставі методів декомпозиції області. Запропоновано вибір параметра релаксації в разі прискорення ітераційного процесу для трьох типів схем. Наведено результати числових експериментів для модельних задач.

Ключові слова: метод декомпозиції області, методи Щура, метод скінченних елементів, прямий метод граничних елементів.

1. ВСТУП

Об'єднані скінченно-граничноелементні апроксимації для різних класів задач математичної фізики останнім десятиліттям стали потужним ефективним засобом їхнього розв'язування та дослідження. Значний інтерес у разі побудови об'єднаних підходів становлять схеми, які ґрунтуються на методах декомпозиції області (МДО). Вони дають змогу звести розв'язування вихідної задачі до набору задач у підобластях. У цьому випадку використовують методи, близькі до оптимальних за умов урахування особливості задачі для кожної підобласті. Методи декомпозиції області формально поділяють на методи, що потребують існування непорожнього перетину підобластей, – методи Шварца (Schwarz)[2], та методи, які потребують лише існування спільної межі підобластей, – методи доповнення Щура (Schur) [10, 11].

Для розв'язування плоскої задачі теорії пружності досліджено три різні варіанти числових схем [6, 8, 9], що ґрунтуються на гібридних апроксимаціях прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) та методу скінченних елементів (МСЕ). На відміну від розвинутого у [2] підходу на підставі альтернуального методу Шварца, ми виконали числове дослідження збіжності ітераційних схем, пов'язане з використанням ПМГЕ, у якому шуканими величинами є значення переміщень та зусиль на границі. Хоча у випадку використання альтернуального методу Шварца порівняно з методами доповнення кількість обчислень на кожній ітерації більша, питання ефективності гетерогенних числових апроксимацій є відкритим. Деяким теоретичним аспектам збіжності ітераційних схем методу декомпозиції області присвячені праці [1, 4, 6, 7]. Якщо у [1, 7] це роблять з використанням спеціального

класу граничних операторів – операторів Пуанкаре–Стеклова, то у [4, 6] – на підставі досліджень властивостей матриць підсумкових систем лінійних алгебричних рівнянь.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай пружно-деформований стан тіла визначений двома компонентами вектора переміщень $u=(u_1, u_2)^T$, що задовольняють рівняння рівноваги [5]

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + F_i = 0 \quad x \in \Omega, \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

кінематичні крайові умови

$$u_i = \bar{u}_i \quad x \in \Omega'' \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

на границі $\partial \Omega''$, і статичні крайові умови

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad x \in \Omega', \quad (i, j = 1, 2), \quad (3)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $F = (F_1, F_2)^T$ – вектор масових сил; \bar{u}_i – задані функції переміщень; n_i – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до границі $\partial \Omega'$; \bar{p}_i – задані компоненти вектора поверхневих сил; $\Gamma = \partial \Omega = \partial \Omega'' \cup \partial \Omega'$, $\partial \Omega'' \cap \partial \Omega' = \emptyset$.

Співвідношення між деформаціями та переміщеннями мають вигляд [5]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad (4)$$

де ε_{ij} – компоненти тензора деформацій.

Фізичні співвідношення можна записати в такому вигляді [5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (5)$$

де $\mu = E/2(1+\nu)$ – модуль зсуву; δ_{ij} – символ Кронекера; ν – коефіцієнт Пуассона;

E – модуль Юнга. Зазначимо, що співвідношення закону Гука (5) наведені для плоского деформованого стану. У випадку плоского напруженого стану коефіцієнт

Пуассона ν і модуль Юнга E замінюються на $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ і $\bar{E} = \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$ відповідно.

3. ДЕЯКІ СХЕМИ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

Запишемо плоску задачу теорії пружності (1)–(5) в операторному вигляді:

$$\begin{aligned} Lu &= F, & x \in \Omega, \\ u &= \bar{u}, & x \in \partial \Omega'', \\ p &= \bar{p}, & x \in \partial \Omega'. \end{aligned} \quad (6)$$

Розіб'ємо область на дві підобласті Ω_F та Ω_B такі, що $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_B$, $\Omega_F \cap \Omega_B = \emptyset$ і $\partial \Omega'' = \partial \Omega_F'' \cup \partial \Omega_B''$, $\partial \Omega' = \partial \Omega_F' \cup \partial \Omega_B'$.

Пружно-деформований стан в області Ω_F визначатимемо на підставі використання МСЕ, а в Ω_B – МГЕ. Причому в підобласті Ω_B застосовуватимемо прямий варіант МГЕ з використанням методу Бубнова–Гальоркіна [3]. Загалом вибір

того чи іншого методу розв'язування в кожній із двох областей залежить від специфіки конкретної задачі. Передбачаємо, що границі області $\Omega_F - \Gamma_F = \partial\Omega_F$ та області $\Omega_B - \Gamma_B = \partial\Omega_B$ локально задовольняють умову Ліпшиця. На спільній межі Ω_F та Ω_B , $\Gamma_C = (\Gamma_F \cup \Gamma_B) \setminus \Gamma$ домагатимемося виконання умов спряження, а саме: нерозривності переміщень $u_j^F = u_j^B$, $x \in \Gamma_C$, $j=1,2$ та умов рівноваги $p_j^F + p_j^B = 0$, $x \in \Gamma_C$, $j=1,2$. Тут $p_j = \partial u_j / \partial n_j = \sum_{l=1}^2 \partial u_j / \partial x_l \cos(n_j, x_l)$ – компоненти вектора поверхневих зусиль; n – зовнішня нормаль до границі підобласті.

Для розв'язування сформульованої задачі використаємо ітераційні алгоритми МДО. Згідно з [1], симетричність та додатна визначеність оператора задачі є однією з достатніх умов збіжності процесу. Деякі теоретичні дослідження збіжності ітераційних методів наведені з використанням дослідження спектральних властивостей неперервних [1] і дискретних [6] операторів задачі.

Наведемо алгоритми трьох ітераційних гетерогенних схем і результати числового дослідження їхньої обчислювальної ефективності.

Алгоритм послідовної схеми Діріхле–Неймана [6, 8] такий.

Крок 0. Приймаємо лічильник ітерацій $k = 1$. Задаємо початкове значення:

$$u_B^k = \bar{u}_0, \quad x \in \Gamma_C.$$

Крок 1. Для заданих кінематичних умов на спільній границі Γ_C розв'язуємо задачу

$$Lu_B^k = f; \quad x \in \Omega_B; \quad u_B^k = \bar{u}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^u; \quad p_B^k = \bar{p}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^t.$$

Знаходимо p_B^k , $x \in \Gamma_C$.

Крок 2. Приймаємо $p_F^k = -p_B^k$, $x \in \Gamma_C$. Для заданих статичних умов на спільній границі Γ_C розв'язуємо задачу

$$Lu_F^k = f; \quad x \in \Omega_F; \quad u_F^k = \bar{u}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^u; \quad p_F^k = \bar{p}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^t.$$

Знаходимо u_F^k , $x \in \Gamma_C$.

Крок 3. Якщо

$$\|u_F^k - u_B^k\| > \varepsilon; \quad x \in \Gamma_C,$$

де ε – задана точність, тоді $u_B^{k+1} = \mu_F^k + (1 - \gamma)u_B^k$, де $x \in \Gamma_C$, приймаємо $k := k + 1$ і переходимо на **Крок 1**, інакше – кінець алгоритму. Тут $\gamma \in (0,1)$ – параметр релаксації.

Алгоритм паралельної схеми Діріхле–Неймана:

Крок 0. Приймаємо лічильник ітерацій $k = 1$. Задаємо початкові значення:

$$u_B^k = \bar{u}_0; \quad p_F^k = \bar{p}_0; \quad x \in \Gamma_C.$$

Крок 1. Для заданих кінематичних умов на спільній границі Γ_C розв'язуємо задачу

$$Lu_B^k = f; \quad x \in \Omega_B; \quad u_B^k = \bar{u}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^u; \quad p_B^k = \bar{p}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^t.$$

Знаходимо p_B^k , $x \in \Gamma_C$. Розв'язуємо задачу із заданими природними граничними умовами

$$Lu_F^k = f; \quad x \in \Omega_F; \quad u_F^k = \bar{u}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^u; \quad p_F^k = \bar{p}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^t.$$

Знаходимо u_F^k , $x \in \Gamma_C$.

Крок 2. Якщо

$$\|u_F^k - u_B^k\| > \varepsilon, \quad \text{де } x \in \Gamma_C,$$

то $u_B^{k+1} = \alpha u_F^k + (1-\alpha)u_B^k$, і $p_F^{k+1} = -p_B^k$, де $x \in \Gamma_C$, приймаємо $k := k+1$ і переходимо на **Крок 1**, інакше – кінець алгоритму. Тут $\alpha \in (0,1)$ – параметр релаксації.

Алгоритм паралельної схеми Неймана–Неймана [6, 9].

Крок 0. Приймаємо лічильник ітерацій $k = 1$. Задаємо початкові значення:

$$p_B^k = \bar{p}_0; \quad p_F^k = -p_B^k; \quad x \in \Gamma_C.$$

Крок 1. Для заданих статичних умов на спільній границі Γ_C розв'язуємо такі дві задачі:

$$Lu_B^k = f; \quad x \in \Omega_B; \quad u_B^k = \bar{u}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^u; \quad p_B^k = \bar{p}_B; \quad x \in \partial\Omega_B^t,$$

$$Lu_F^k = f; \quad x \in \Omega_F; \quad u_F^k = \bar{u}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^u; \quad p_F^k = \bar{p}_F; \quad x \in \partial\Omega_F^t.$$

Розв'язавши першу задачу, знаходимо u_B^k , $x \in \Gamma_C$, а розв'язавши другу, – u_F^k , $x \in \Gamma_C$.

Крок 2. Якщо

$$\|u_F^k - u_B^k\| > \varepsilon, \quad \text{де } x \in \Gamma_C,$$

то $p_B^{k+1} = p_B^k + \beta(u_F^k - u_B^k)$, і $p_F^{k+1} = -p_B^k$, де $x \in \Gamma_C$, приймаємо $k := k+1$ і переходимо на **Крок 1**, інакше – кінець алгоритму. Тут β – параметр релаксації, який, на відміну від параметрів релаксації γ та α , є розмірним.

Наявність параметрів релаксації у всіх трьох алгоритмах дає змогу побудувати збіжний процес. Вдалий вибір параметрів робить його ефективнішим. Тому одним із головних завдань для ітераційних методів є оптимізація вибору цих параметрів.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Наведемо результати апробації числової ефективності описаних варіантів ітераційних процесів, які відрізняються від підходу з праці [10].

Приклад 1. Розглянемо консольну балку під дією рівномірного навантаження $p = (0, -1)^T$ (рис. 1). Балка жорстко защемлена з лівого краю. Механічні характеристики матеріалу $E = 1$, $\nu = 0,3$.

Задачу розв'язували з використанням двох схем: послідовної Діріхле–Неймана та паралельної Діріхле–Неймана. За початкові наближення вибирали $\bar{u}_0 = (0,0)^T$, $x \in \Gamma_C$ для першої схеми та $\bar{u}_0 = (0,0)^T$, $\bar{p}_0 = (0,0)^T$, $x \in \Gamma_C$ для другої. Використовували скінченноелементну сітку з 256 трикутних елементів та лінійною апроксимацією переміщень і $16 \times 8 \times 16 \times 8$ граничних елементів з лінійною апроксимацією переміщень і зусиль.

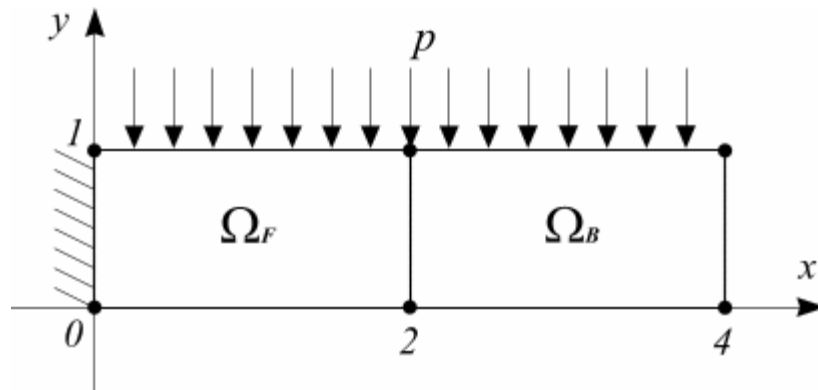


Рис. 1. Консольна балка під дією рівномірного навантаження

Оптимальний параметр релаксації для першої схеми – $\gamma = 0.57$. За такого параметра точність $\varepsilon = 10^{-5}$ досягали за 22 ітерації цієї схеми. Оптимальний параметр релаксації для другої схеми $\alpha = 0.41$. Розв’язок цієї задачі з такою ж точністю досягали за 42 ітерації. Більша кількість ітерацій, на наш погляд, зумовлена неузгодженістю початкових значень переміщень та зусиль для другої схеми.

На рис. 2 показано залежність кількості ітерацій від параметра релаксації за точності $\varepsilon = 10^{-5}$, а на рис. 3 – залежність кількості ітерацій від точності за параметра релаксації 0,41 для обох схем. Криві 1 відповідають результатам для послідовної схеми Діріхле–Неймана, 2 – результатам, отриманим з використанням паралельної схеми Діріхле–Неймана.

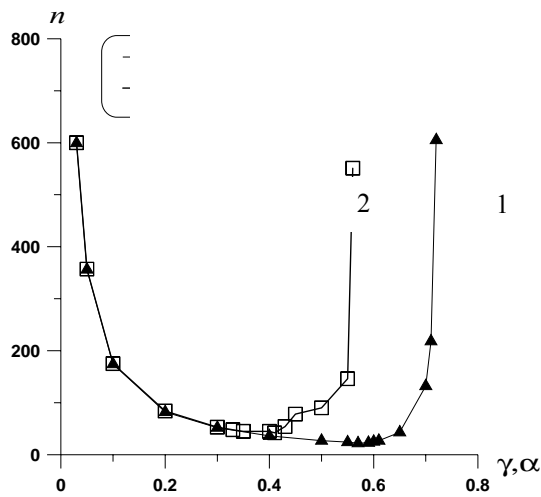


Рис. 2. Залежність кількості ітерацій від параметра релаксації.

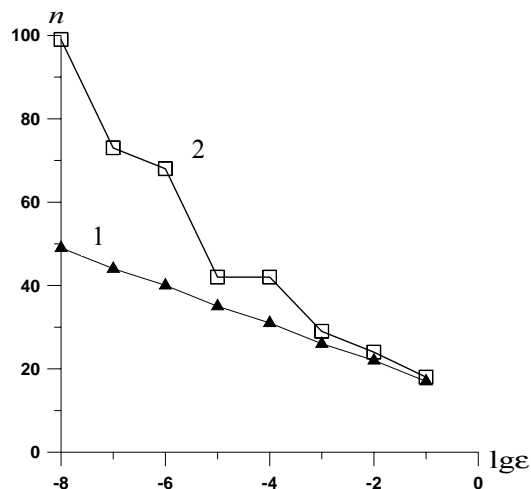


Рис. 3. Залежність кількості ітерацій від точності.

Приклад 2. Область Ω має вигляд двохшарової консольної балки (рис. 4). На верхній поверхні балки діє рівномірне навантаження $p = (0, -1)^T$. Лівий край балки жорстко зашкелений. Механічні характеристики $E = 1$, $\nu = 0,3$.

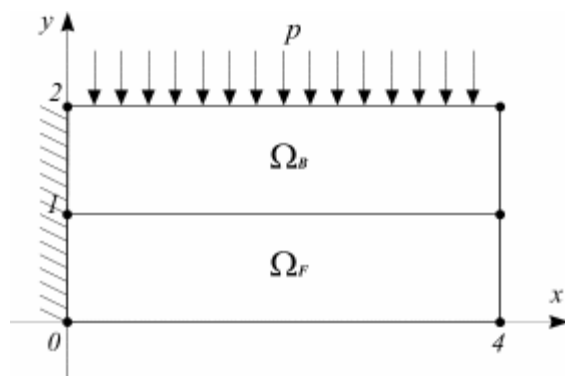


Рис. 4. Двошарова консольна балка під дією рівномірного навантаження.

Задачу розв'язували з використанням усіх трьох наведених схем. За початкові наближення вибирали $\bar{u}_0 = (0, 0)^T$, $x \in \Gamma_C$ для першої схеми та $\bar{u}_0 = (0, 0)^T$, $\bar{p}_0 = (0, 0)^T$, $x \in \Gamma_C$ – для другої, $\bar{p}_0 = (0, 0)^T$, $x \in \Gamma_C$ – для третьої. Використовували скінченноелементну сітку з 512 трикутних елементів та лінійною апроксимацією переміщень і $32 \times 8 \times 32 \times 8$ граничних елементів з лінійною апроксимацією переміщень і зусиль.

Оптимальний параметр релаксації для першої схеми – $\gamma = 0,16$. За такого параметра точність $\varepsilon = 10^{-3}$ досягали за 61 ітерацію цієї схеми. Розв'язок цієї ж задачі з такою ж точністю досягали другою схемою за 122 ітерації для параметра

релаксації $\alpha = 0,08$. Для схеми Неймана–Неймана коефіцієнт β вибирали різним для нормальних і дотичних навантажень. У першому випадку отримане оптимальне значення параметра релаксації $\beta_y = 0,0035$, а у другому – $\beta_x = 0,04$. Для цієї схеми точність $\varepsilon = 10^{-1}$ була досягнута для $\beta = \lambda\beta_i$ при $\lambda = 0,9$ за 199 ітерацій у кубічній нормі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики // Вычислительные процессы и системы. Вып.8 / Под ред. Г.И. Марчука. М.: Наука, 1991. С. 4–50.
2. *Березюк Т.Б., Григоренко А. Я., Дыяк И.И.* Решение задачи о напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Прикл. механика. 2003. Т. 39. № 10. С. 69–74.
3. *Головач Н.П., Дыяк И.И.* Метод декомпозиції області та комбінований скінченно-гранично-елементний аналіз пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2000. № 1. С. 115–117.
4. *Савула Я.Г., Кривс В.В.* Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1996. Вип. 44. С. 3–10.
5. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
6. *El-Gebeily M., Elleithy Wael M., Al-Gahtani Husain J.* Convergence of domain decomposition finite element-boundary element coupling methods // Comp. Methods Appl. Meth. Engrg. 2002. Vol. 191. P. 4851–4867.
7. *Hsiao G.C., E. Schnack, Wedland W. L.* Hybrid coupled finite element methods for elliptic systems of second order // Comp. Methods Appl. Meth. Engrg. 2000. Vol. 190. P. 431–485.
8. *Kamiya N., Iwase H., Kita E.* Parallel computing for the combination method of BEM and FEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 1996. Vol. 18. P. 221–229.
9. *Kamiya N., Iwase H.* BEM and FEM combination parallel analysis using conjugate gradient and condensation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 1997. Vol. 20. P. 319–326.
10. *Lin C.-C., Lawton E.C., Caliendo J.C., Anderson L.R.* An iterative finite element-boundary element algorithm // Comput. Struct. 1996. Vol. 59. № 5. P. 899–909.
11. *Smith B.F., Bjorstad P.E., Gropp W.D.* Domain Decomposition. Cambridge: Univ. Press, 1996. 224 p.

**NUMERICAL EFFICIENCY OF HYBRID FINITE-BOUNDARY ELEMENT
APPROXIMATIONS FOR ELASTICITY PROBLEM
BY DOMAIN DECOMPOSITION METHOD**

I. Dyyak, I. Makar, I. Prokopyshyn

Ivan Franko National University of Lviv

Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: dyyak@franko.lviv.ua

The heterogeneous numerical scheme for the solution of the problem of elasticity by finite element method and direct boundary element method with some versions of domain decomposition method is proposed. The choice of a parameter of relaxation for acceleration of iterative process is offered. The results of numerical experiments for the model problem are presented.

Key words: domain decomposition method, Schur method, finite element method, direct boundary element method

Стаття надійшла до редколегії 14.09.2006

Прийнята до друку 13.06.2007