

УДК 627.324.2/3:532.72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕРМІЧНОГО РОЗШИРЕННЯ НА НАДЛИШКОВІ НАПОРИ В НАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ

А. Власюк, П. Мартинюк

Національний університет водного господарства та природокористування
бул. Соборна, 11, м. Рівне, 33000, e-mail: P.M.Martinjuk@rstu.rv.ua

У математичному моделюванні фільтраційної консолідації ґрунтів у неізотермічних умовах запропоновано використати рівняння нерозривності, у яких враховано теплове розширення порової рідини та твердого скелета ґрунту. Досліджено задачу консолідації масиву глинистого ґрунту обмеженої товщини. Для числового розв'язування відповідної одновимірної крайової задачі використано метод скінченних елементів. Наведено результати числових експериментів та їхній аналіз.

Ключові слова: термічне розширення, надлишкові напори, фільтраційна консолідація, теплоперенесення, метод скінченних елементів.

1. ВСТУП

Зміна теплового режиму ґрунтового масиву може значно впливати на процес його фільтраційної консолідації. Зокрема, у праці [2] з'ясовано, що врахування термічного осмосу порової рідини та термодифузії розчинених у ній солей змінює процес розсіювання надлишкових напорів у ґрунті, який консолідується.

Відомо, що зміна теплового режиму будь-якого матеріалу приводить до його термічного розширення (стиснення). В праці [2] цього фізичного явища не враховували. Тому для підвищення адекватності математичних моделей фільтраційної консолідації розглядуваним фізичним процесам є актуальною задача врахування термічного розширення порової рідини та твердого скелета ґрунту. Підтвердженням можливості впливу цього явища на розподіл напорів у поровій рідині пористого середовища є накопичений експериментальний матеріал.

У праці [16] наведено результати експериментальних досліджень, згідно з якими, за умови, коли нема дренажування, нагрівання призводить до значного підвищення тиску в поровій рідині насиченого ґрунтового середовища.

Згідно з [11], зміна температури на один градус може призвести до збільшення порового тиску приблизно на 1,5% порівняно з ефективним тиском.

Як зазначено в [15], останніми десятиліттями значно посилився інтерес до дослідження впливу зміни температурного режиму на поведінку ґрунтів. Важливість розуміння термомеханічної поведінки ґрунту та пористого середовища взагалі пояснюють багатьма причинами, головними серед яких є такі:

- 1) глибинне захоронення радіоактивних відходів, які є джерелом тепла, у геологічних формаціях;
- 2) проведення бурових робіт;
- 3) прокладання високовольтних кабелів у ґрунті;
- 4) сезонні та добові коливання температур, що значно впливають на покриття доріг та фундаменти споруд.

У зазначеній вище праці головну увагу приділено експериментальному дослідженню пружно-деформованого стану ґрунтового середовища внаслідок зміни його температурного режиму.

Питанню експериментального дослідження впливу температури на поведінку ґрунтів присвячено також праці [12–14, 18]. Головну увагу в них приділено глинам як базовим геологічним породам, у яких захоронюють відходи виробництва.

Термічне розширення порової рідини може призвести до виникнення надлишкових напорів у порах ґрунту. Ці напори в загальному випадку є негативним явищем, оскільки можуть зменшувати стійкість ґрунтових основ та будівель, зведених на них, що, відповідно, є причиною виникнення критичних ситуацій під час будівництва та експлуатації промислових і цивільних споруд. Тому вивчення процесу накопичення та розсіювання надлишкових напорів у пористому середовищі у разі зміни його температурного режиму важливе й актуальне.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМІЧНОГО РОЗШИРЕННЯ ФАЗ ҐРУНТУ

Під час дослідження процесів фільтраційної консолідації насичених ґрунтів рівняння, яке описує динаміку зміни надлишкових напорів, отримане на підставі таких рівнянь нерозривності порової рідини та твердої фази ґрунту, відповідно:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}(\rho_T \mathbf{v}) + \frac{\partial(m\rho_T)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{u} – вектор швидкості фільтрації; \mathbf{v} – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту; m – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту; ρ_T – густина твердих частинок ґрунту; ρ – густина порової води; n – пористість ґрунту; t – час.

Однак у неізотермічному режимі зміна маси твердої та рідкої фаз в елементарному об'ємі $dx dy dz$ пористого середовища може відбуватись не лише завдяки швидкостям \mathbf{u} , \mathbf{v} та зміні n , m у часі, а й унаслідок теплового розширення (стиснення) фаз ґрунту. Припустимо, що теплове розширення рідкої та твердої фаз ґрунту прямо пропорційне до зміни температури T з часом з коефіцієнтами об'ємного розширення α та β , відповідно. Нехай відносна частина q ($0 \leq q \leq 1$) об'єму твердого скелета, що утворилась унаслідок теплового розширення, є в межах розглядуваного елементарного об'єму $dx dy dz$. Це означає, що в межах елементарного об'єму $dx dy dz$ внаслідок теплового розширення скелета ґрунту виникатиме додатковий тиск на порову рідину. Тоді рівняння (1) набудуть вигляду

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} - (\alpha + q\beta)n\rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}(\rho_T \mathbf{v}) + \frac{\partial(m\rho_T)}{\partial t} - \beta(1-q)m\rho_T \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Дослідимо вплив на зміну надлишкових напорів у масиві ґрунту прийняття рівнянь нерозривності у вигляді (2). Для цього використаємо результати теорії фільтраційної консолідації ґрунтів [10].

З урахуванням залежності (2) на підставі головної розрахункової моделі Флоріна [10] та узагальненого закону Дарсі–Герсеванова на випадок неізотермічних умов [2]

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{k}(T)\nabla h + \mathbf{k}_T\nabla T \quad (3)$$

отримаємо рівняння, що описує динаміку зміни надлишкових напорів у ґрунті з урахуванням теплового розширення фаз ґрунту та термічного осмосу

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & \frac{(1+[r-1]\xi)(1+\bar{e})}{r\gamma a} [\operatorname{div}(\mathbf{k}(T)\nabla h) - \operatorname{div}(\mathbf{k}_T\nabla T)] + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + \\ & + (\alpha + (2q-1)\beta) \frac{(1+[r-1]\xi)\bar{e}}{r\gamma a} \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рівняння (4) потрібно ще доповнити рівнянням теплоперенесення в ґрунтовому середовищі [5]

$$\operatorname{div}(\lambda\nabla T) - \rho c_p \mathbf{u}\nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (5)$$

а також відповідними початковими та граничними умовами для невідомих функцій. Тут використані такі позначення: r – розмірність задачі; $h = p/\gamma$ – надлишковий напір; p – надлишковий тиск у поровому розчині; $\mathbf{k}(T) = \{k_{ij}(T)\}$, $\mathbf{k}_T = \{(k_T)_{ij}\}$, $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, – тензори, відповідно, коефіцієнтів фільтрації, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; e , \bar{e} – коефіцієнт пористості та його середнє значення; γ – питома вага порової рідини; ξ , a – коефіцієнти бічного тиску та стисливості ґрунту; c_p – питома теплоємність порового розчину; c_T – об’ємна теплоємність ґрунту за сталого об’єму; Θ^* , h^* – сума головних напружень у скелеті ґрунту та надлишковий напір у стані повної стабілізації.

Розглянемо одновимірну задачу дослідження зміни надлишкових напорів у масиві ґрунту обмеженої товщини [10], що перебуває в процесі консолідації. На підставі закону (3), рівнянь (4), (5) та результатів праці [1] математичну модель зазначеної вище одновимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням термічного розширення фаз можна описати такою крайовою задачею:

$$\frac{(1+\bar{e})}{\gamma a} \left[\frac{\partial}{\partial x} (k(T) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (k_T \frac{\partial T}{\partial x}) \right] + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + (\alpha + (2q-1)\beta) \frac{\bar{e}}{\gamma a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) - \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (7)$$

$$u = e v - k(T) \frac{\partial h}{\partial x} + k_T \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (8)$$

$$h(0, t) = 0, \quad (9)$$

$$u|_{x=l} = 0; \quad (10)$$

$$T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t); \quad (11)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad (12)$$

де $x \in [0; l]$, $t > 0$; $T_1(t)$, $T_2(t)$, $h_0(x)$, $T_0(x)$ – задані функції.

Уважають, що верхня межа масиву ґрунту дренована, а нижня – непроникна. Температура на обох межах є відомою.

3. ЗНАХОДЖЕННЯ ЧИСЛОВОГО РОЗВ’ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ (6)–(12) МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай H_0 – простір вектор-функцій $\mathbf{s}(x) = (s_1(x); s_2(x))$, кожна з компонент $s_i(x)$, $i = 1, 2$, яких в області $\Omega = (0; l)$ належить простору Соболева $W_2^1(\Omega)$,

причому $s_1(x)$ та $s_2(x)$ набувають нульових значень на тих кінцях відрізка $[0; l]$, де, відповідно, для функцій $h(x, t)$, $T(x, t)$ задані граничні умови першого роду.

Нехай H – простір вектор-функцій $\mathbf{f}(x, t) = (f_1(x, t); f_2(x, t))$, кожна з компонент $f_i(x, t)$, $i = 1, 2$, яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $i = 1, 2$, в області Ω , $\forall t \in (0; t_0]$, причому $f_i(x, t)$, $i = 1, 2$ задовольняють, відповідно, граничні умови першого роду, що й функції $h(x, t)$, $T(x, t)$.

Оскільки значення сіткового числа Пекле рівняння (7) $Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_\rho u\|}{\|\lambda\|}$ може бути більшим від одиниці, то числовий розв'язок задачі (6)–(12), побудований за схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати у всій області визначення. Тут h_e – максимальна довжина з усіх скінченних елементів. Для усунення цих недоліків у задачах тепломасоперенесення застосовують стабілізаційні та адаптивні схеми методу скінченних елементів [4, 6, 8, 17]. Тому для стабілізації числових розв'язків рівняння (7) використаємо протипотокову схему Петрова–Гальоркіна [17], яка заміняє варіаційну задачу збуреною.

Використаємо стандартну процедуру: домножимо рівності (6), (7) та кожен з початкових умов (12), відповідно, на довільні функції $s_1(x)$, $s_2(x)$ такі, що $(s_1(x); s_2(x)) \in H_0$, проінтегруємо їх за областю Ω , застосуємо інтегрування за частинами та використаємо для рівняння (7) протипотокову схему Петрова–Гальоркіна [17], отримаємо

$$\int_0^l \frac{\partial h}{\partial t} s_1 dx + \frac{(1+\bar{e})}{a\gamma} \int_0^l (k \frac{\partial h}{\partial x} \frac{ds_1}{dx} - k_T \frac{\partial T}{\partial x} \frac{ds_1}{dx}) dx = \tag{13}$$

$$= (\alpha + (2q-1)\beta) \frac{\bar{e}}{\gamma a} \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} s_1 dx + \int_0^l (\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta^*}{\partial t}) s_1 dx, \quad \forall t \in (0; t_0];$$

$$\int_0^l h(x, 0) s_1 dx = \int_0^l h_0(x) s_1 dx; \tag{14}$$

$$c_T \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} s_2 dx + \int_0^l \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{ds_2}{dx} dx + \rho c_\rho \int_0^l u \frac{\partial T}{\partial x} s_2 dx + \tag{15}$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e \int_{\Omega_e} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial x}) \rho c_\rho u \frac{ds_2}{dx} dx = 0, \quad \forall t \in (0; t_0];$$

$$\int_0^l T(x, 0) s_2 dx = \int_0^l T_0(x) s_2 dx; \tag{16}$$

$\forall (s_1(x); s_2(x)) \in H_0, (h(x, t); T(x, t)) \in H$.

Наближений розв'язок задачі (6)–(12) відшукаємо у вигляді

$$(\hat{h}(x, t); \hat{T}(x, t)) = (\sum_{i=1}^{n_1} a_i(t) \cdot N_i^{(1)}(x); \sum_{j=1}^{n_2} b_j(t) \cdot N_j^{(2)}(x) + W_2(x, t)), \tag{17}$$

де $\mathbf{N}_i = (N_i^{(1)}; 0)$, $i = \overline{1, n_1}$, $\mathbf{N}_j = (0; N_{j-n_1}^{(2)})$, $j = \overline{n_1+1, n_1+n_2}$, – базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \subset H_0$; $W_2(x, t)$ – відома функція така, що $W_2(0, t) = T_1(t)$, $W_2(l, t) = T_2(t)$.

З рівностей (13)–(16) при $(s_1(x); s_2(x)) \in M_0$ отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь щодо вектора $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{A}(t); \mathbf{B}(t))$

$$\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}); \quad (18)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{R}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)}; \quad (19)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n_1}(t)), \quad \mathbf{A}^{(0)} = (a_1(0), a_2(0), \dots, a_{n_1}(0)), \quad \mathbf{B} = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_{n_2}(t)); \\ \mathbf{B}^{(0)} &= (b_1(0), b_2(0), \dots, b_{n_2}(0)), \quad \mathbf{M}^{(2)} = (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} = (\tilde{m}_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \mathbf{L}^{(2)} = (l_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}; \\ \mathbf{F}^{(2)} &= (f_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} = (\tilde{f}_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{M}^{(1)} = (m_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{L}^{(1)} = (l_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = (g_{ij}^{(1)})_{i=1, j=1}^{n_1, n_2}; \\ \mathbf{R}^{(1)} &= (r_{ij}^{(1)})_{i=1, j=1}^{n_1, n_2}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = (f_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} = (\tilde{f}_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \int_0^l N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx, \quad m_{ij}^{(1)} = \int_0^l N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx; \\ \tilde{f}_i^{(2)} &= \int_0^l T_0 N_i^{(2)} dx - \int_0^l W_2(x, 0) N_i^{(2)} dx, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = \int_0^l h_0 N_i^{(1)} dx, \quad l_{ij}^{(1)} = \frac{1 + \bar{e}}{\gamma a} \int_0^l k \frac{dN_i^{(1)}}{dx} \frac{dN_j^{(1)}}{dx} dx; \\ f_i^{(1)} &= \int_0^l \left(\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right) N_i^{(1)} dx + (\alpha + (2q - 1)\beta) \int_0^l \frac{\partial W_2}{\partial t} N_i^{(1)} dx, \quad g_{ij}^{(1)} = \frac{1 + \bar{e}}{\gamma a} \int_0^l k_T \frac{dN_i^{(1)}}{dx} \frac{dN_j^{(2)}}{dx} dx; \\ r_{ij}^{(1)} &= (\alpha + (2q - 1)\beta) \frac{\bar{e}}{\gamma a} \int_0^l N_i^{(1)} N_j^{(2)} dx, \quad m_{ij}^{(2)} = c_T \left(\int_0^l N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx + \sum_{\Omega_e} \tau_e \int_{\Omega_e} \rho c_\rho u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} \frac{dN_j^{(2)}}{dx} dx \right); \\ l_{ij}^{(2)} &= \int_0^l \left(\lambda \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} + \rho c_\rho u N_i^{(2)} \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \right) dx + \sum_{\Omega_e} \tau_e \int_{\Omega_e} \rho c_\rho \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \right) + \rho c_\rho u \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \right) u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx, \\ f_i^{(2)} &= - \int_0^l \left(c_T \frac{\partial W_2}{\partial t} N_i^{(2)} + \lambda \frac{dN_i^{(2)}}{dx} \frac{\partial W_2}{\partial x} + \rho c_\rho u N_i^{(2)} \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) dx - \\ &\quad - \sum_{\Omega_e} \tau_e \int_{\Omega_e} \rho c_\rho \left(c_T \frac{\partial W_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + \rho c_\rho u \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx. \end{aligned}$$

Коефіцієнт фільтрації в рівнянні (6) залежить від температури $T(x, t)$ [1, 5]. Тому елементи матриці $\mathbf{L}^{(1)}$ залежать від шуканої вектор-функції $\mathbf{B}(t)$. Аналогічно, швидкість фільтрації u залежить від $h(x, t)$ та $T(x, t)$. Тому елементи матриць $\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{L}^{(2)}$ та вектор-стовпця $\mathbf{F}^{(2)}$ залежать від невідомих вектор-функцій $\mathbf{A}(t)$ та $\mathbf{B}(t)$.

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (18)–(20) поділимо часовий відрізок $[0; t_0]$ на M однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{M}$. Позначимо через $\mathbf{U}^{(j)} = (\mathbf{A}^{(j)}; \mathbf{B}^{(j)})$ – наближені розв'язки задачі Коші (18)–(20) при $t = j\tau$, $j = \overline{0, M-1}$; $\mathbf{A}^{(j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)})$, $\mathbf{B}^{(j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)})$.

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (18), (19) отримуємо за допомогою схеми Кранка–Ніколсона [3]

$$\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j+1/2)}, \mathbf{B}^{(j+1/2)}) \cdot \frac{\mathbf{B}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j+1/2)}, \mathbf{B}^{(j+1/2)}) \cdot \mathbf{B}^{(j+1/2)} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j+1/2)}, \mathbf{B}^{(j+1/2)}),$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{A}^{(j+1)} - \mathbf{A}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}^{(j+1/2)}) \cdot \mathbf{A}^{(j+1/2)} = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(j+1/2)} + \mathbf{R}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{B}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(1)(j+1/2)}.$$

Схема Кранка–Ніколсона потребує на кожному часовому шарі розв'язування систем нелінійних рівнянь. Щоб уникнути цього, для знаходження наближених розв'язків задачі Коші можна використати схему предиктор–коректор [7]

$$\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j)}, \mathbf{B}^{(j)}) \cdot \frac{\mathbf{W}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j)}, \mathbf{B}^{(j)}) \cdot (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}) = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{A}^{(j)}, \mathbf{B}^{(j)}),$$

$$\mathbf{M}^{(2)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{Q}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)}], \frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}]\right) \cdot \frac{\mathbf{B}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} +$$

$$+ \mathbf{L}^{(2)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{Q}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)}], \frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}]\right) \cdot \mathbf{B}^{(j+1/2)} = \mathbf{F}^{(2)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{Q}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)}], \frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}]\right),$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{(j+1)} - \mathbf{A}^{(j)}}{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}^{(j)}) \cdot (\mathbf{Q}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)}) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{(1)} \cdot (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}) + \mathbf{R}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{W}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(1)(j+1/2)},$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{A}^{(j+1)} - \mathbf{A}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}]\right) \cdot \mathbf{A}^{(j+1/2)} = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(j+1/2)} + \mathbf{R}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{B}^{(j+1)} - \mathbf{B}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(1)(j+1/2)},$$

де \mathbf{W} , \mathbf{Q} – допоміжні вектор-функції, $j = 0, M-1$.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Оцінку впливу врахування теплового розширення фаз ґрунту на розподіл надлишкових напорів у насиченому пористому середовищі з'ясовано на тестовому прикладі. З огляду на це розглянуто одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару глинистого ґрунту товщиною $l = 25$ м з такими вихідними даними: $\bar{e} = 0.7$, $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$, $k_T = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $\lambda = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $\rho = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}$, $T_1 = 15^\circ \text{C}$, $T_2 = 90^\circ \text{C}$.

Також прийmemo $q = 0.5$, оскільки вважаємо, що тверда фаза ґрунту в усіх напрямках розширюється однаково. Згідно з [18], $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$, $\beta = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$.

Залежність коефіцієнта фільтрації від температури в разі фільтрації чистої води визначали апроксимацією за методом найменших квадратів результатів експериментів, наведених у [15] при $k(20^\circ \text{C}) = 0.001 \text{ м} / \text{доба}$:

$$k(T) = b_5 \cdot T^5 + b_4 \cdot T^4 + b_3 \cdot T^3 + b_2 \cdot T^2 + b_1 \cdot T + b_0,$$

де $b_5 = 1.2 \cdot 10^{-1}$, $b_4 = -3.3 \cdot 10^{-1}$, $b_3 = 3.01 \cdot 10^{-1}$, $b_2 = -1.1 \cdot 10^{-1}$, $b_1 = 1.9 \cdot 10^{-2}$, $b_0 = -2 \cdot 10^{-4}$, $T \in [0, 1]$ – безрозмірна величина. Тенденція цієї залежності така, що коефіцієнт фільтрації збільшується на порядок у діапазоні температур від 3 до 55° , а при 55° стабілізується.

Уважаємо, що надлишкові напори від прикладення зовнішнього навантаження або від власної ваги ґрунту розсіялись, тобто $h_0(x) = 0$ і $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0$, а також, що на нижній непроникній межі ґрунту температура миттєво підвищується до T_2 . Така ідеалізація процесу зроблена для того, щоб ліпше простежити саме вплив термічного розширення ґрунтових фаз на зміну розподілу надлишкових напорів у ґрунті. За реальних умов надлишкові напори будуть зумовлені як прикладеним зовнішнім навантаженням на ґрунт, так і термічним розширенням ґрунтових фаз.

Обчислення виконано на рівномірній сітці з лінійними та квадратичними базисними функціями. Попередньо математична модель (6)–(12) зведена до збезрозміреного вигляду. Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом. Значення кроку за часом у збезрозміреній моделі $\bar{\tau} = 0,0012$, що відповідає кроку в реальному часі $\tau = 30$ діб. Інтеграли для відшукування елементів відповідних матриць у задачі Коші (18)–(20) обчислено з використанням квадратурних формул Гаусса.

На рис. 1–2 показано графіки розподілу поля надлишкових напорів для різного часу від початку впливу температури з урахуванням залежності $k = k(T)$, термічного осмосу та ефекту термічного розширення фаз ґрунту у разі непроникної та дренавної нижньої межі.

Аналіз результатів числових експериментів розрахунку полів надлишкових напорів для цієї задачі засвідчив, що у випадку врахування термічного розширення порової рідини і твердого скелета в масиві ґрунту виникають стійкі поля надлишкових напорів, які повільно розсіюються в часі. У випадку дренавної нижньої межі ці напори досягають менших значень і швидше розсіюються, ніж за умови її непроникності.

Повільне розсіювання надлишкових напорів пояснюють малим числовим значенням коефіцієнта фільтрації для глинистих ґрунтів, хоча і приймають його збільшення на порядок у разі підвищення температури до 55°C .

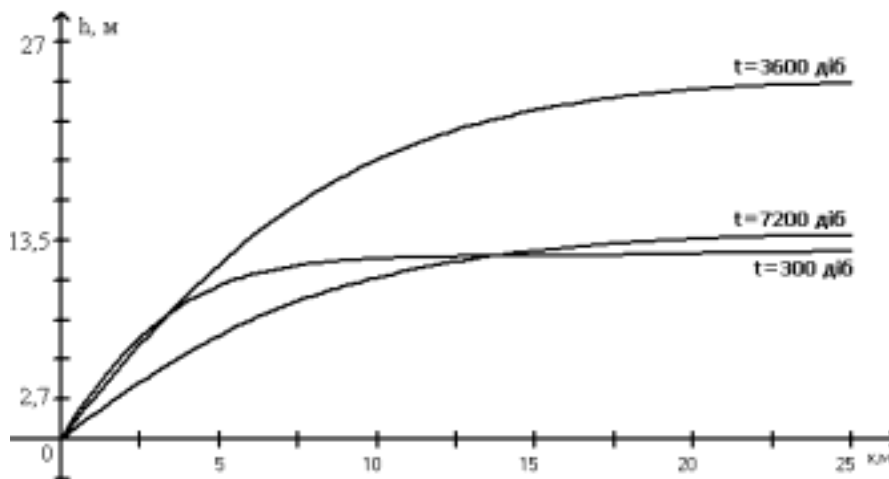


Рис. 1. Графіки розподілу надлишкових напорів з урахуванням ефекту термічного розширення в разі непроникної нижньої межі.

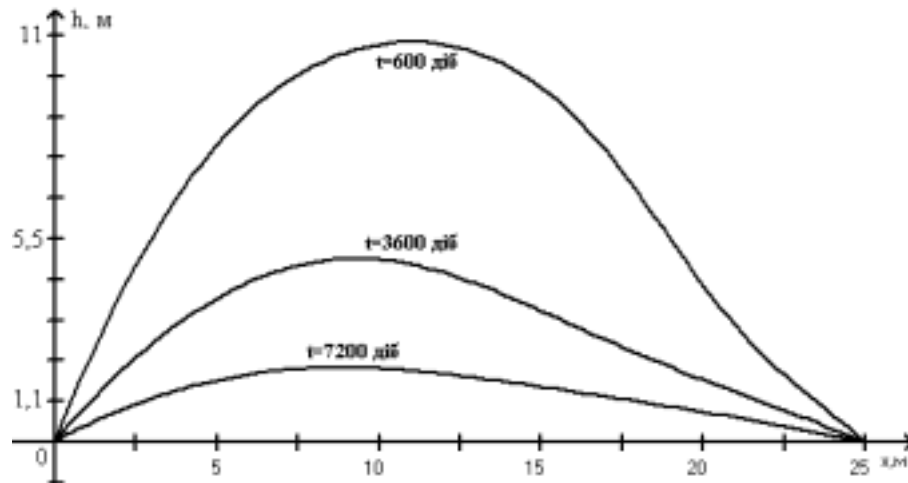


Рис. 2. Графіки розподілу надлишкових напорів з урахуванням ефекту термічного розширення в разі дренажної нижньої межі.

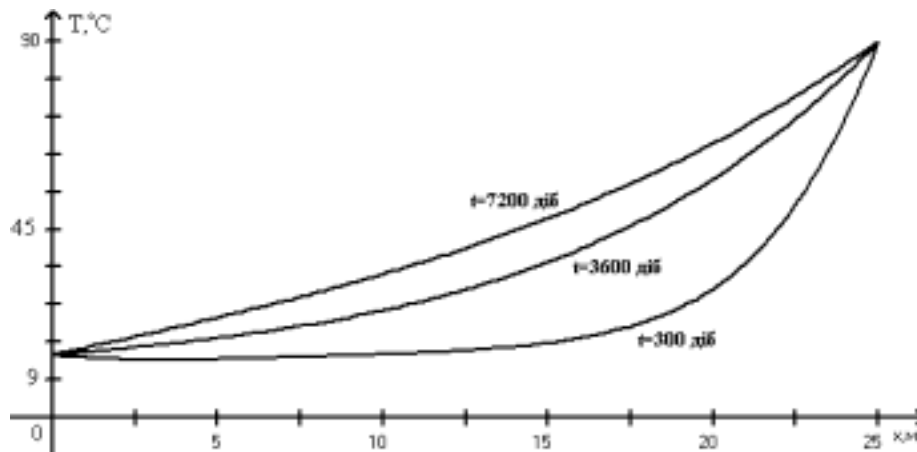


Рис. 3. Графіки розподілу температури з урахуванням ефекту термічного розширення.

5. ВИСНОВКИ

Отже, за високих температур тепловим розширенням фаз ґрунту нехтувати не можна. Як засвідчив тестовий приклад, у разі врахування цього ефекту в масиві ґрунту виникають стійкі поля надлишкових напорів. Отримані дані якісно узгоджуються з експериментальними, згідно з якими під час нагрівання ґрунту відбувається підвищення порових тисків. Це явище може призвести до негативних наслідків, пов'язаних як зі стійкістю споруд, зведених на цих ґрунтах, так і зі стійкістю самих ґрунтових масивів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Брилинг И.А.* Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин // Связанная вода в дисперсных системах. 1977. Вып. 4. С. 82–89.
2. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2003. Вип. 7. С. 138–147.
3. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К.: Наук. думка, 1998.
4. *Козаревська Ю.С.* Регуляризація числових розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Частина 2 // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2003. Вип. 7. С. 175–185.
5. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. К.: Наук. думка, 1991.
6. *Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г.* Стабілізація числових розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. С. 3–9.
7. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. К.: Наук. думка, 1991.
8. *Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова.* М.: Энергоатомиздат, 1991.
9. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 2. М.: Госстройиздат, 1961.
10. *Шинкаренко Г.А., Козаревська Ю.С.* Регуляризація числових розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1 // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2001. Вип. 5. С. 153–164.
11. *Campanella R.G., Mitchell J.K.* Influence of temperature variations on soil behavior // J. Soil Mechanics and Foundations division. 1968. Vol. 94. P. 709–734.
12. *Cekerevac C., Laloui L.* Experimental study of thermal effects on the mechanical behaviour of a clay // Int. J. Anal. Meth. Geomech. 2004. Vol. 28. P. 209–228.
13. *Cui Y.J., Sultan N., Delage P.* A thermomechanical model for saturated clays // Can. Geotech. J. 2000. Vol. 37. P. 607–620.
14. *Delage P., Sultan N., Cui Y.J.* On the thermal consolidation of Boom clay // Can. Geotech. J. 2000. Vol. 37. P. 343–354.
15. *Laloui L.* Thermo-mechanical behavior of soils // Revue Francaise de genie civil. 2001. Vol. 5. P. 809–843.
16. *Plum R.L., Esrig M. J.* Some temperature effects on soil compressibility and pore water pressure // Highway Research Board. 1969. Sp Rpt 103. P. 213–242.
17. *Sandra M.C. Malta, Abimael F.D. Loula, Eduardo L.M. Garcia.* Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations // Comput. Meth. Appl. Mech. Engineering. 2000. Vol. 187. P. 119–136.
18. *Sultan N., Delage P., Cui Y.J.* Temperature effects on the volume change behaviour of Boom clay // Engineering Geology. 2002. Vol. 64. P. 135–145.

**MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL EXPANSION INFLUENCING
ON SURPLUS PRESSURE IN SATURATED SOILS**

A. Vlasyuk, P. Martinyuk

*National University of Water Management and Nature Resources Application
Soborna str, 11, Rivne, 33000, e-mail: P.M.Martinjuk@rstu.rv.ua*

The indissolubility equations with influencing of thermal expansion in mathematical modeling of the soil filtration consolidation in nonisothermal conditions have been proposed to use. The clayey soil layer infinite width filtration consolidation problem has been investigated. The numerical solution of the corresponding one-dimensional boundary-value problem has been found by the finite element method. Numerical experiments and their analyses have been carried out.

Key words: thermal expansion, surplus pressure, filtration consolidation, heat transfer, finite element method.

*Стаття надійшла до редколегії 11.10.2006
Прийнята до друку 13.06.2007*