

УДК 519.6

## ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ – ДИФУЗІЇ НА ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

В. Кухарський\*, Л. Тиличко\*, Р. Сулим\*, Н. Кухарська\*\*

\* Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: itl@franko.lviv.ua

\*\* Львівський інститут пожежної безпеки  
вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79000, e-mail: kuharska\_n@rambler.ru

Розглянуто проблеми побудови математичних моделей та числового дослідження двовимірних нестационарних задач адвекції – дифузії в прямокутній області. Отримано аналітичні розв'язки для відповідних одновимірних задач, які використовують для тестування алгоритмів розв'язування проблемних двовимірних задач.

*Ключові слова:* адвекція – дифузія, число Пекле, аналітичний розв'язок.

### 1. ВСТУП

Серед сучасних проблем математичного моделювання важливе місце посідає дослідження процесів адвекції – дифузії у різних за формою та заповненням середовищах. Це пов'язано з широким спектром застосувань математичних моделей, що описують такі явища, для розв'язування задач мікроелектроніки, гідродинаміки, фізіології, перенесення забруднень у ґрунтах та інших задачах екології тощо.

Дослідження процесів адвекції – дифузії з використанням проекційно-сіткових методів ускладнене відомими проблемами нестійкості числових схем для задач з великими числами Пекле [2]. Тому важливою є не тільки розробка числових схем та методів їхньої стабілізації, а також верифікація отриманих розв'язків на підставі розв'язків, побудованих аналітично. З огляду на це наведемо двовимірну математичну модель нестационарної адвекції – дифузії, з використанням методу скінченних елементів побудуємо розв'язки цієї задачі [3], зіставлені з отриманими аналітичними розв'язками одновимірної задачі.

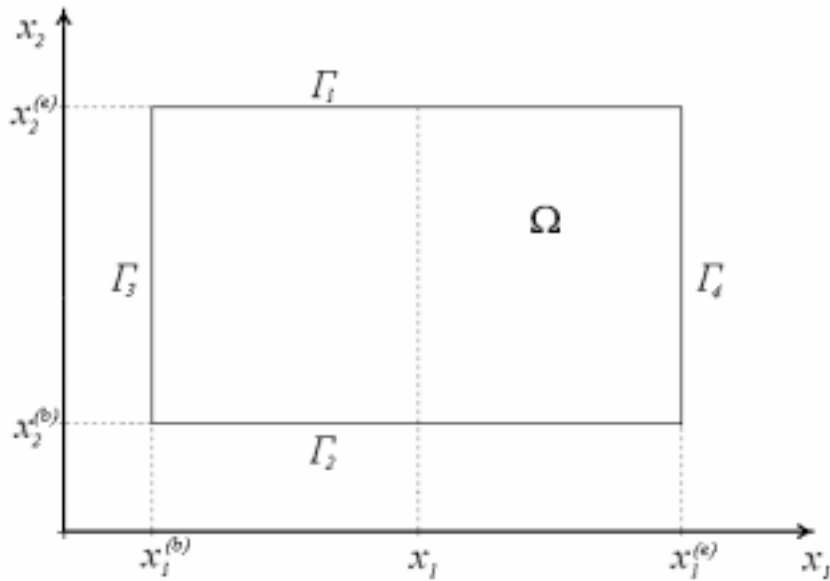
### 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо рівняння адвекції – дифузії на деякій обмеженій зв'язній області  $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^{(b)} \leq x_1 \leq x_1^{(e)}, x_2^{(b)} \leq x_2 \leq x_2^{(e)}\}$

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial \tau} + \kappa \omega \text{gradu} - \text{div} \lambda \text{gradu} = f. \quad (1)$$

У разі різного трактування коефіцієнтів рівняння (1) описує адвективну теплопровідність, перенесення забруднень, адвекцію в задачах екології, ріст кристалів тощо.

Граничні умови у двовимірній прямокутній області  $\Omega$  з границею  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  (рис. 1) задамо в двох варіантах

Рис. 1. Двовимірна прямокутна обмежена зв'язна область  $\Omega$ .

$$u|_{\Gamma_1} = u_c^{(1)}, \quad u|_{\Gamma_2} = u_c^{(2)}; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = 0, \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_4} = 0, \quad (3)$$

або

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \beta_1(u - u_c^{(1)}), \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_2} = \beta_2(u - u_c^{(2)}); \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = 0, \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_4} = 0. \quad (5)$$

Початкову умову запишемо у вигляді

$$u = u_0 \text{ при } \tau = 0. \quad (6)$$

### 3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ

Уведемо простір

$$V = \{v(x_1, x_2) \in W_2^1(\Omega) : v|_{\Gamma'} = 0\}, \text{ де } \Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

і білінійні та лінійні форми

$$m(u, v) = \kappa \int_{\Omega} u v d\Omega;$$

$$a(u, v) = \omega \kappa \int_{\Omega} \text{grad} u \text{ grad} v d\Omega$$

для граничних умов типу (2) – (3)

$$b(u, v) = \lambda \int_{\Omega} \text{grad} u \text{ grad} v d\Omega;$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

та для граничних умов типу (4) – (5)

$$b(u, v) = \lambda \int_{\Omega} \text{grad} u \text{grad} v d\Omega + \int_{\Gamma_1} \beta^{(1)} u v d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \beta^{(2)} u v d\Gamma_2;$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} \beta^{(1)} u_c^{(1)} v d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \beta^{(2)} u_c^{(2)} v d\Gamma_2. \quad (7)$$

У наведених вище позначеннях запишемо варіаційне формулювання [5] задачі (1) – (3), (6) чи (1), (4) – (6). Знайти такий елемент  $u \in (0, T; V)$ , що  $\forall v \in V$  задовольняє рівняння

$$m(u', v) + a(u, v) + b(u, v) = l(v) \quad (8)$$

та умову

$$m(u - u_0, v) = 0. \quad (9)$$

#### 4. АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ

Побудуємо розв'язки деяких одновимірних задач, які пізніше використаємо для тестування розробленої числової методики розв'язування складніших двовимірних задач.

Нестационарну задачу в момент часу  $t$  розв'яжемо методом розділення змінних, а стационарну задачу – методом заміни змінних.

Для початку розглянемо стационарну задачу

$$-\lambda u'' + \kappa \omega u = 0; \quad (10)$$

$$\begin{cases} u(x_b) = p_1; \\ u(x_e) = p_2. \end{cases} \quad (11)$$

Розв'язки подібних задач з однорідними граничними умовами (11) відомі [1, 4]. Для рівняння (10) з неоднорідними умовами (11) отримаємо розв'язок

$$u = \frac{(p_1 - p_2)(e^{m x_b} - e^{m x})}{e^{m x_e} - e^{m x_b}} + p_1. \quad (12)$$

Для нестационарної задачі

$$\kappa u_t + \kappa \omega u_x - \lambda u_{xx} = 0; \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi;$$

$$u(0, t) = \rho_1; \quad (14)$$

$$u(L, t) = \rho_2$$

вдалося побудувати розв'язки методом розділення змінних у вигляді

$$u(x, t) = e^{\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x} v(x, t), \quad (15)$$

де

$$v(x, t) = z(x, t) + w(x, t); \quad (16)$$

$$z(x, t) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - 1} e^{\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x} + \frac{\rho_1 e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - \rho_2}{e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - 1} e^{-\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x}; \quad (17)$$

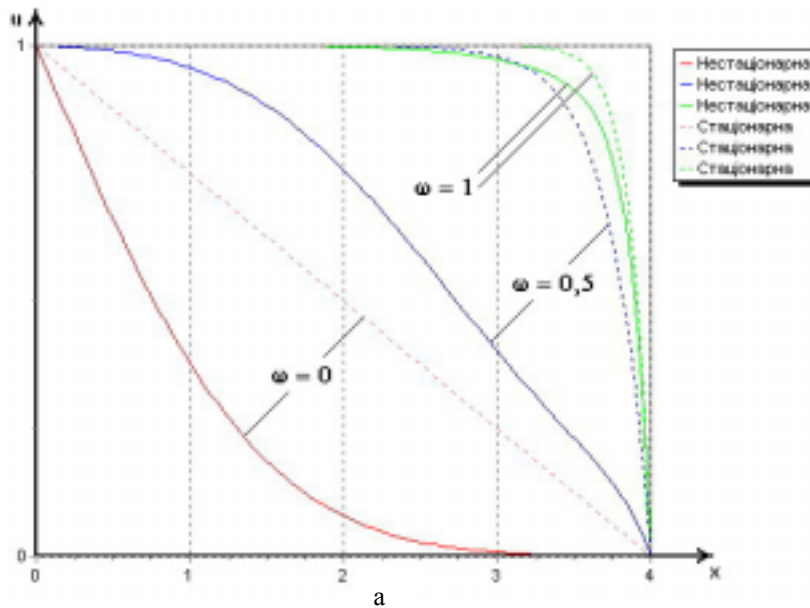
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-at} \sin \frac{\pi n}{L} x. \quad (18)$$

### 5. ТЕСТОВІ ПРИКЛАДИ

*Приклад 1.* Наведемо порівняння аналітичних розв'язків стаціонарної (10)–(12) та нестаціонарної (13)–(18) одновимірних задач адвекції–дифузії за швидкостями в різні моменти часу за таких вхідних даних:

$$x_b = 1, x_e = 0, p_1 = 0, p_2 = 4, \lambda = 0.54, \kappa = 4.189, t = 5, t = 20.$$

На підставі аналізу одержаних результатів можна зробити висновок, що при  $t \rightarrow \infty$  нестаціонарний розв'язок наближається до стаціонарного (рис. 2).



*Приклад 2.* Розглянемо двовимірну задачу (1)–(3), (6) на лінії  $x = x_c$  в різні моменти часу. Порівняємо результати, отримані методом скінченних елементів, з аналітичними для таких вхідних даних:

$$u_c^{(1)} = 1, u_c^{(2)} = 0, \lambda = 0.54, \kappa = 4.189, \omega = 0, Pe = 0, t = 50.$$

На рис. 3 показано порівняння розв'язку на лінії  $x = x_c$  з урахуванням того, що складова вектора  $grad u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  (адвективне перенесення тільки в напрямі  $x_2$ ). За нульової швидкості та розбиття на шість скінченних елементів по осі  $x_2$  максимальна абсолютна похибка становить 0,0025 (у масштабах рис. 3 графіки аналітичного та числового розв'язків накладаються). У разі розбиття на десять скінченних елементів вона становить 0,0001.

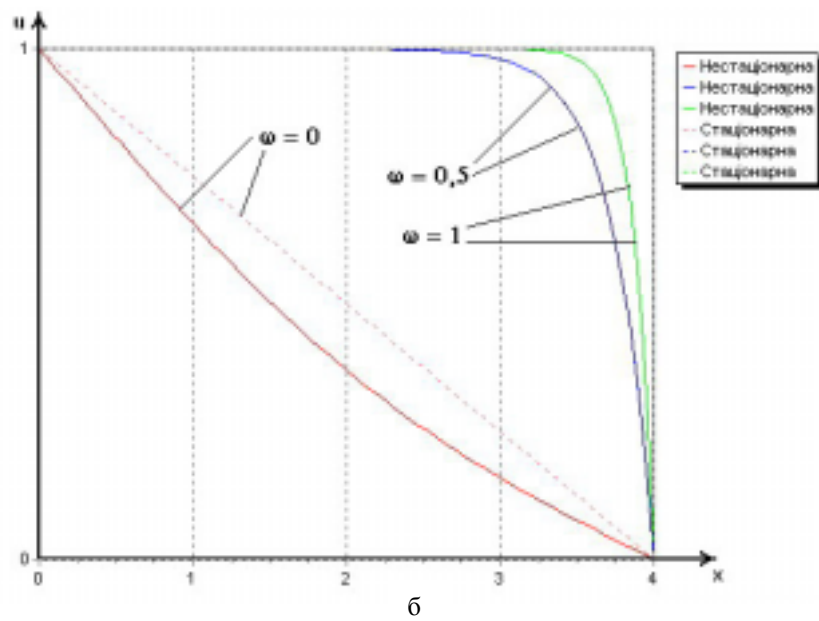


Рис. 2. Порівняння стаціонарного та нестаціонарного розв'язків за швидкостями в різні моменти часу:  
 $a - t = 5$ ;  $b - t = 20$ .

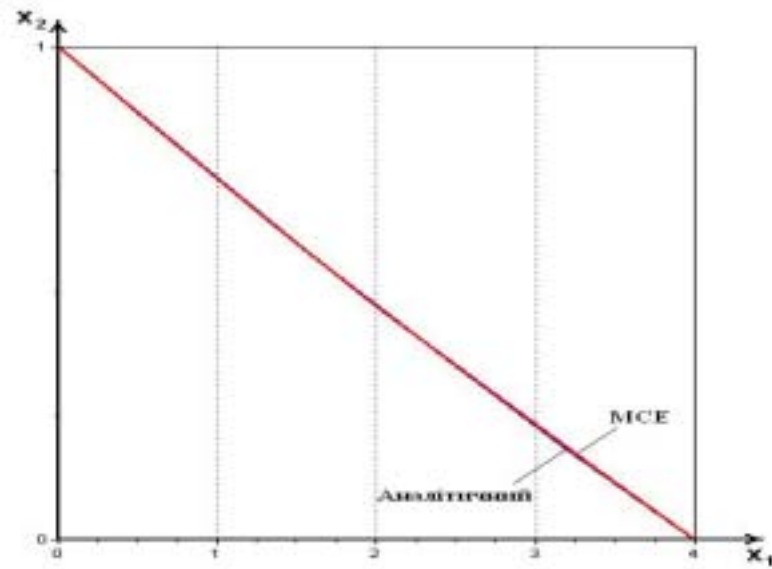


Рис. 3. Порівняння аналітичного та числового розв'язків за швидкості перенесення  $\omega = 0$ .

Якщо змінити вхідні дані так:

$$\omega = 0.1, Pe = 3.1, \Delta Pe = 1.24, t = 40,$$

тобто збільшити швидкість адвективного перенесення субстанції, то ми спостерігатимемо збільшення числа Пекле та сіткового числа Пекле. Максимальна абсолютна похибка становить 0,01 (рис. 4).

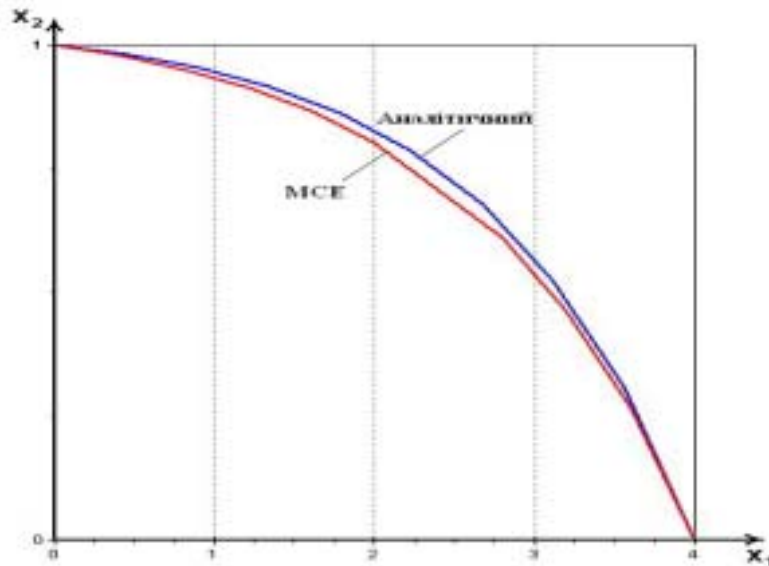


Рис. 4. Порівняння аналітичного та числового розв'язків при швидкості  $\omega = 0,1$ .

За даних

$$\omega = 1, Pe = 31.03, \Delta Pe = 20.69, \Delta x = 4/6, t = 40$$

зі збільшенням швидкості збільшуються числа Пекле і розв'язок втрачає точність (рис. 5).

Розв'язок можна поліпшити шляхом згущення сітки ( $\Delta x = 4/14$ ), що показано на рис. 6.

## 5. ВИСНОВКИ

На підставі запропонованої моделі нестационарної адвекції – дифузії у прямокутній області побудовано числові розв'язки двовимірної задачі. Розглянуто відповідні одновимірні стаціонарні та нестационарні задачі та отримано їхні аналітичні розв'язки. Виконано верифікацію числових розв'язків двовимірної задачі в прямокутній області з використанням отриманих аналітичних розв'язків одновимірних задач.

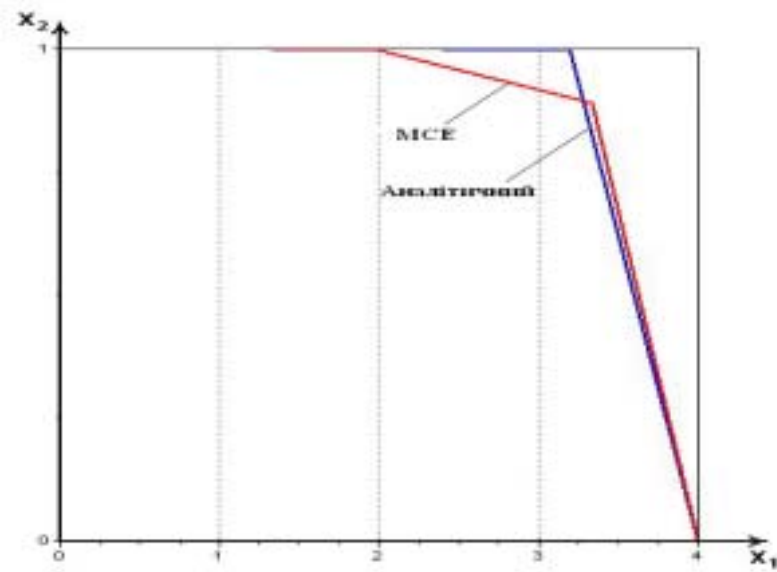


Рис. 5. Порівняння аналітичного та числового розв'язків при швидкості  $\omega = 1,0$ .

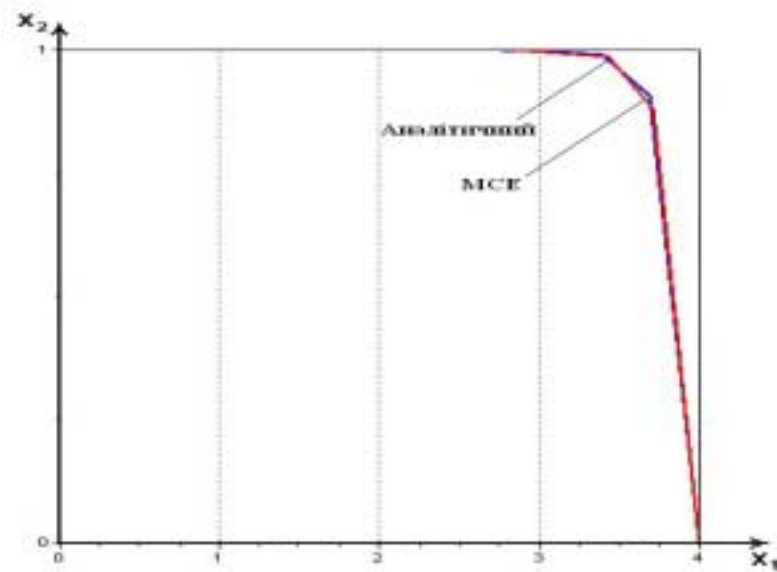


Рис. 6. Порівняння аналітичного та числового розв'язків на густішій сітці ( $\Delta x = \frac{4}{14}$ ).

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
2. *Кухарський В.М., Савула Я.Г., Головач Н.П.* Стабілізація розв'язків задач адвекції – дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченних елементів // Моделювання та інформаційні технології. 2002. Вип. 15. С. 3 – 14.
3. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
4. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988.
5. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991.

**NUMERICAL RESEARCH OF 2D NONSTEADY ADVECTION-DIFFUSION PROBLEM IN RECTANGULAR REGION****V. Kukharskyy, L. Tylychko, R. Sulym, N. Kuharska**

*Ivan Franko National University In Lviv  
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: itl@franko.lviv.ua*

It is considered problems of mathematical models construction and numerical research of 2-D non-steady advection - diffusion problems in rectangular area. It is received analytical solutions for corresponding one-dimensional problems that are used for testing algorithms of the 2-D advection-diffusion problem solving.

*Key words:* advection-diffusion, Peclet number, analytical solution.

*Стаття надійшла до редколегії 22.11.2005*

*Прийнята до друку 07.06.2006*