

УДК 539.3

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

П. Вагін, І. Шот

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: vahin@franko.lviv.ua

Розглянуто процес геометрично-лінійного деформування оболонок, податливих на зсув та стиснення. Записано ключові рівняння розглядуваної задачі. Наведено числові розв'язки, отримані методом скінченних елементів. Виконано порівняння розв'язків у межах розглянутої теорії з числовими розв'язками в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна та Кіргофа–Лява.

Ключові слова: оболонка Тимошенка–Міндліна, крайова задача, варіаційна задача.

1. ВСТУП

При проектуванні елементів конструкцій сучасної техніки часто виникають складні задачі визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок, які можуть мати різноманітну геометричну форму і складну фізико-механічну структуру, а також перебувати під дією нерівномірних силових навантажень. Математичне моделювання із застосуванням обчислювальної техніки дає змогу використовувати числові методи, що ґрунтуються на варіаційних формулюваннях розглядуваних задач, які допомагають з достатньою точністю передбачити поведінку тонких оболонок.

Головна особливість застосованого нами підходу полягає в напівдискретизації вихідної задачі теорії пружності за просторовою змінною, яка визначена нормально до серединної поверхні, з метою зведення тривимірної задачі аналізу процесів у пружних тілах з малою (порівняно з іншими розмірами) товщиною до адекватних двовимірних задач, сформульованих на серединній поверхні цього тіла.

2. ГОЛОВНІ ПРИПУЩЕННЯ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБОЛОНКИ

Розглянемо оболонку сталюї товщини $h = \text{const} > 0$, що займає в евклідовому просторі R^3 обмежену область V з неперервною за Ліпшицем межею S . Позначимо через n одиничний вектор зовнішньої нормалі до S . Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leq h/2$. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω . Тоді точки оболонки визначатиме множина $V = \Omega \times]-h/2, h/2[$, межу S якої повністю описують поверхні $\Omega_{\pm} = \Omega \times \{\pm h/2\}$ та $\Sigma = \Gamma \times]-h/2, h/2[$.

Уведена параметризація оболонки дає підстави стверджувати, що елемент об'єму оболонки $dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$. Тут H_i ($i=1,2,3$) – параметри Ляме, причому

$$\begin{aligned} H_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= A_i(1 + \alpha_3 k_i), \quad i=1,2; \\ H_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 1, \end{aligned} \quad (1)$$

де $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ і $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ($i=1,2$) – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω та її головні кривини, відповідно.

Припустимо, що оболонка піддається дії

- поверхневого навантаження

$$\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_i(\alpha)\}_{i=1}^3, \quad (2)$$

прикладеного до поверхні $S_\sigma = \Omega_+ \cup \Omega_-$;

- поверхневого навантаження

$$\bar{\tau} = \{\bar{\tau}_t(\alpha, \alpha_3), \bar{\tau}_s(\alpha, \alpha_3), \bar{\tau}_n(\alpha, \alpha_3)\}^T \quad (3)$$

на частині Σ_σ поверхні Σ , причому $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times]-h/2, h/2[$, $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$;

- масових сил

$$f(\alpha, \alpha_3) = \{f_i(\alpha, \alpha_3)\}_{i=1}^3 \quad \text{в області } V, \quad (4)$$

де $\bar{\tau}_t, \bar{\tau}_s, \bar{\tau}_n$ – нормальна, дотична та перерізувальна складові прикладеного до Σ_σ поверхневого навантаження (тут t, s, n – орти правої трійки криволінійних координат).

На решті бічної поверхні $\Sigma_u = \Sigma \setminus \Sigma_\sigma$ задано переміщення

$$u|_{\Sigma_u} = \{u_i^g\}_{i=1}^6. \quad (5)$$

3. АПРОКСИМАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Нехай процес деформування оболонки в розглядуваній системі координат характеризують три проекції U_1, U_2, U_3 вектора повного переміщення точки в напрямках, дотичних до координатних ліній $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ у цій точці. З огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами оболонки товщину h , обмежимося в описі переміщень точок оболонки лише лінійними складовими ряду Тейлора в околі значень $\alpha_3 = 0$. Тоді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (6)$$

Тут $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ($i=1,2,3$) описують переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки, оскільки $u_i(\alpha_1, \alpha_2) = U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)$, а $\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_3}$ ($i=1,2,3$)

характеризують залишкові члени ряду Тейлора і визначають кут повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні. Оскільки $\gamma_3(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, то апроксимація (6) припускає зміну довжини елемента нормалі в разі деформування.

Зі співвідношення (6), яке відповідає кінематичній гіпотезі теорії оболонки типу Тимошенка, випливає, що вектор переміщень довільної точки оболонки повністю визначений компонентами вектора переміщень $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ($i=1,2,3$) та вектора кутів повороту $\gamma = \{\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2)\}_{i=1}^3$ нормалі до серединної поверхні оболонки.

Для зручності подальшого викладу введемо вектор узагальнених переміщень серединної поверхні оболонки $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$.

4. ДЕФОРМАЦІЯ ОБОЛОНКИ

Компоненти тензора лінійних деформацій E_{ij} ($i, j=1,2,3$) довільної точки оболонки визначають через компоненти деформації серединної поверхні за допомогою співвідношень [1]

$$\begin{aligned} E_{ii} &= \frac{e_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}; & E_{i3} &= \frac{2e_{i3} + \alpha_3 2\kappa_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i}, & i &= 1,2; \\ E_{33} &= e_{33}; & E_{12} &= \frac{2e_{12} + \alpha_3 2\kappa_{12}}{(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\{e_{ij}(u)\}$ та $\{\kappa_{ij}(u)\}$ – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій, визначені так:

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial_i u_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} u_{3-i} + u_3 k_i; & 2e_{i3} &= \gamma_i + \frac{\partial_i u_3}{A_i} - k_i u_i; & i &= 1,2; \\ e_{33} &= \gamma_3; & 2e_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{u_2}{A_2}; \\ \kappa_{ii} &= \frac{\partial_i \gamma_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} \gamma_{3-i} + \gamma_3 k_i; & 2\kappa_{i3} &= \frac{\partial_i \gamma_3}{A_i}; & i &= 1,2; \\ 2\kappa_{12} &= \frac{k_1}{A_2} \partial_2 u_1 - \frac{k_2 \partial_2 A_1}{A_1 A_2} u_1 + \frac{k_2}{A_1} \partial_1 u_2 - \\ & - \frac{k_1 \partial_1 A_2}{A_1 A_2} u_2 + \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{\gamma_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{\gamma_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

У співвідношеннях (8) та далі введені позначення $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ ($i=1,2,3$).

Описані вище компоненти можна об'єднати у вектор компонент тензора лінійної деформації $e = \{e_i\}_{i=1}^{11} = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\}^T$.

5. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ОБОЛОНОК ТА НАПРУЖЕННЯ

Потенціальну енергію оболонки виражають за допомогою компонент тензорів напружень $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$ та деформацій $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^3$ так:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} E_{ii} + \sigma_{12} E_{12} + \sigma_{13} E_{13} + \sigma_{23} E_{23} \right) dV = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} E_{ii} + \sigma_{12} E_{12} + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{13} E_{13} + \sigma_{23} E_{23} \right) (1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уведемо усереднені характеристики напружень σ_{ij} :

$$\begin{aligned}
[N_{ij}, M_{ij}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} (1 + \alpha_3 k_{3-i}) [1, \alpha_3] d\alpha_3; \\
N_{33} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33} (1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3; \\
[N_{i3}, M_{i3}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} (1 + \alpha_3 k_{3-i}) [1, \alpha_3] d\alpha_3, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Використаємо умову рівності з точністю до $o(h^2)$ крутних моментів $H = M_{12} = M_{21}$ та симетричне зусилля Новожилова [3] $S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$. Підставимо у (9) замість деформацій їхні вирази (7) та проінтегруємо за α_3 з урахуванням (10), отримаємо такий вираз для роботи внутрішніх сил на варіаціях переміщень:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \iint_{\Omega} (N_{11} e_{11}(\delta u) + M_{11} \kappa_{11}(\delta u) + N_{22} e_{22}(\delta u) + M_{22} \kappa_{22}(\delta u) + \\
&\quad + N_{33} e_{33}(\delta u) + 2S e_{12}(\delta u) + 2H \kappa_{12}(\delta u) + 2N_{13} e_{13}(\delta u) + \\
&\quad + 2M_{13} \kappa_{13}(\delta u) + 2N_{23} e_{23}(\delta u) + 2M_{23} \kappa_{23}(\delta u)) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для зручності подальшого викладу введемо вектор зусиль-моментів $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{11} = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$.

6. РОБОТА ЗОВНІШНІХ СИЛ НА ОБОЛОНКУ

Повна робота зовнішніх сил на варіаціях допустимих переміщень δU дорівнює сумі робіт масових сил (4) та поверхневих навантажень (2), (3):

$$\begin{aligned}
 \delta A = & \iint_{\Omega} \left(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^T \delta U (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \int_{\Gamma_\sigma} \left(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \hat{\tau}^T \delta U (1 + \alpha_3 k_t) d\alpha_3 \right) d\Gamma + \\
 & + \iint_{\Omega_i} \left(\hat{\sigma}^{+\frac{h}{2}} \right)^T \delta U^{+\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \iint_{\Omega_i} \left(\hat{\sigma}^{-\frac{h}{2}} \right)^T \delta U^{-\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{12}$$

де k_t – кривина бічної поверхні оболонки в напрямі нормалі до кривої Γ ; $\hat{\sigma}^{\pm\frac{h}{2}}$ – напруження на лицьових поверхнях оболонки; $U^{\pm\frac{h}{2}}$ – переміщення на лицьових поверхнях оболонки.

Використаємо розвинення (6), зведемо (12), попередньо проінтегрувавши за α_3 , до вигляду

$$\begin{aligned}
 \delta A = & \int_{\Gamma} (N_t \delta u_t + N_s \delta u_s + N_n \delta u_n + M_t \delta \gamma_t + M_s \delta \gamma_s + M_n \delta \gamma_n) d\Gamma + \\
 & + \iint_{\Omega} (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3 + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2 + m_3 \delta \gamma_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Тут уведені такі усереднені характеристики навантаження:

$$\begin{aligned}
 P_i = & \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) \hat{\sigma}_i^{+\frac{h}{2}} + \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) \hat{\sigma}_i^{-\frac{h}{2}} + \\
 & + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3; \\
 m_i = & \frac{h}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) \hat{\sigma}_i^{+\frac{h}{2}} - \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) \hat{\sigma}_i^{-\frac{h}{2}} \right\} + \\
 & + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) \alpha_3 d\alpha_3,
 \end{aligned} \tag{14}$$

$i = 1, 2, 3,$

а також

$$\begin{aligned}
[N_t, M_t] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_t (1 + \alpha_3 k_t) [1, \alpha_3] d\alpha_3; \\
[N_s, M_s] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_s (1 + \alpha_3 k_s) [1, \alpha_3] d\alpha_3; \\
[N_n, M_n] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_n [1, \alpha_3] d\alpha_3.
\end{aligned} \tag{15}$$

Під k_s розуміємо кривину бічної поверхні оболонки в напрямі дотичної до кривої Γ .

7. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ ОБОЛОНКИ ТА КРАЙОВІ УМОВИ

Рівняння рівноваги теорії оболонок, податливих на зсув і стиснення, та статичні крайові умови запишемо із принципу можливих переміщень [4], згідно з яким робота $\delta\Pi$ внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі δA зовнішніх сил на тих самих варіаціях.

У термінах зусиль і моментів система рівнянь рівноваги оболонок, податливих на зсув та стиснення, має вигляд

$$\begin{aligned}
&\partial_1(N_{11}A_2) - N_{22}\partial_1A_2 + S\partial_2A_1 + \frac{1}{2}\partial_2(Hk_1A_1) + \\
&+ \frac{1}{2}Hk_2\partial_2A_1 + k_1A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2S = -P_1A_1A_2; \\
&\partial_2(N_{22}A_1) - N_{11}\partial_2A_1 + S\partial_1A_2 + \frac{1}{2}\partial_1(Hk_2A_2) + \\
&+ \frac{1}{2}Hk_1\partial_1A_2 + k_2A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1S = -P_2A_1A_2; \\
&\partial_1(N_{13}A_2) + \partial_2(N_{23}A_1) - A_1A_2(N_{11}k_1 + N_{22}k_2) = -P_3A_1A_2; \\
&\partial_1(M_{11}A_2) - M_{22}\partial_1A_2 + H\partial_2A_1 - A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2H = -A_1A_2m_1; \\
&\partial_2(M_{22}A_1) - M_{11}\partial_2A_1 + H\partial_1A_2 - A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1H = -A_1A_2m_2; \\
&\partial_1(M_{13}A_2) + \partial_2(M_{23}A_1) - A_1A_2(N_{33} + M_{11}k_1 + M_{22}k_2) = -A_1A_2m_3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Крайові умови на напруження на частині контуру серединної поверхні Γ_σ ($\Gamma_\sigma \subset \Gamma$) запишемо так:

$$\begin{aligned}
 N_t &= N_{11} \cos^2 \theta + N_{22} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} S \sin 2\theta + \frac{1}{4} \{(k_1 + k_2)H\} \sin 2\theta; \\
 N_s &= \frac{1}{2} (N_{22} - N_{11}) \sin 2\theta + S \cos^2 \theta - S \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (k_2 \cos^2 \theta - k_1 \sin^2 \theta) H; \\
 N_n &= N_{13} \cos \theta + N_{23} \sin \theta; \\
 M_t &= M_{11} \cos^2 \theta + M_{22} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} H \sin 2\theta; \\
 M_s &= \frac{1}{2} (M_{22} - M_{11}) \sin 2\theta + H \cos^2 \theta - H \sin^2 \theta; \\
 M_n &= M_{13} \cos \theta + M_{23} \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{17}$$

У формулах (17) символом θ позначено кут між нормаллю n до границі області Ω та віссю α_1 .

8. ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Щоб повністю описати процес лінійного деформування ізотропної оболонки, необхідно доповнити систему наведених вище рівнянь співвідношеннями, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами:

$$\sigma = B e. \tag{18}$$

Тут B – матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11 , ненульові компоненти якої такі:

$$\begin{aligned}
 B^{1,1} = B^{2,2} = B^{3,3} &= \frac{(1-\nu)Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\
 B^{1,2} = B^{2,1} = B^{1,3} = B^{3,1} = B^{2,3} = B^{3,2} &= \frac{\nu Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\
 B^{4,4} = B^{5,5} = B^{6,6} &= \frac{Eh}{(1+\nu)}; & B^{7,7} = B^{8,8} &= \frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}; \\
 B^{7,8} = B^{8,7} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}; & B^{9,9} = B^{10,10} = B^{11,11} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Нижче наведені формули для обчислення напружень у довільній точці оболонки:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{1}{h} \left(N_{11} + 12M_{11} \frac{\alpha_3}{h^2} \right); & \sigma_{22} &= \frac{1}{h} \left(N_{22} + 12M_{22} \frac{\alpha_3}{h^2} \right); \\
 \sigma_{33} &= \frac{1}{h} \left(N_{33} + 6\nu(M_{11} + M_{22}) \frac{\alpha_3}{h^2} \right); & \sigma_{12} &= \frac{1}{h} \left(S + 12H \frac{\alpha_3}{h^2} \right); \\
 \sigma_{13} &= \frac{1}{h} \left(N_{13} + 12M_{13} \frac{\alpha_3}{h^2} \right); & \sigma_{23} &= \frac{1}{h} \left(N_{23} + 12M_{23} \frac{\alpha_3}{h^2} \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

9. ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК (ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ)

Розглянемо замкнуту циліндричну оболонку, переріз середньої поверхні якої має вигляд

$$x = R \cos \alpha_2; \quad y = R \sin \alpha_2; \\ 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi.$$

Оболонка перебуває під дією рівномірно розподіленого внутрішнього навантаження $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 = P$; краї $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_1 = a$ шарнірно оперті. Розрахунок виконано для значень $\frac{a}{R} = 1,5$, $\nu = 0,3$, $\frac{h}{R} = 0,025$, $E = 1$. Тут R – радіус оболонки; h – товщина оболонки; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

У табл. 1 – 3 наведено значення $2u_3 E / (RP \cdot 10^2)$, $2N_{22} / RP$ та напружень σ_{22} / P

на зовнішній поверхні циліндра для різних $\alpha_1 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ числового розв'язку, розглянутого в праці [5] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка – Міндліна), який порівнюють із результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної нами.

Таблиця 1

Числовий розв'язок $2u_3 E / (RP \cdot 10^2)$

α_1	[5]	МСЕ (розбиття 19×1)
0.0	0.0	0.0
0.1579	0.4615	0.447006
0.3158	0.7392	0.720647
0.4737	0.8390	0.832992
0.6316	0.8520	0.852683
0.7895	0.8328	0.837230
0.9474	0.8123	0.817623
1.1050	0.8022	0.804499
1.2630	0.7976	0.798209
1.4210	0.7965	0.796071

Таблиця 2

Числовий розв'язок $2N_{22}/RP$

α_1	[5]	МСЕ (розбиття 19×1)
0.0	0.0	0.0
0.1579	1.154	1.11689
0.3158	1.848	1.80107
0.4737	2.098	2.08218
0.6316	2.130	2.13160
0.7895	2.082	2.09308
0.9474	2.031	2.04409
1.1050	2.005	2.01128
1.2630	1.994	1.99554
1.4210	1.991	1.99020

Таблиця 3

Числовий розв'язок σ_{22}/P

α_1	[5]	МСЕ (розбиття 19×1)
0.0	0.0	0.0
0.1579	36.61	32.8840
0.3158	49.16	45.3140
0.4737	47.34	46.7364
0.6316	44.65	44.3569
0.7895	41.61	41.8245
0.9474	39.82	40.2689
1.1050	39.79	39.6192
1.2630	39.64	39.4725
1.4210	39.76	39.4862

10. ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК (ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КАТЕНОЇДА)

Розглянемо оболонку, що утворена обертанням лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ навколо осі OZ . Один з контурів оболонки вільний, а інший – жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження q .

Параметричні рівняння розглядуваної оболонки мають вигляд

$$x(\alpha_1, \alpha_2) = a \cos \alpha_2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a};$$

$$y(\alpha_1, \alpha_2) = a \sin \alpha_2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a};$$

$$z(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1.$$

Коефіцієнти Ляме і кривини обчислені за формулами

$$A_1 = \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a}; \quad A_2 = a \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a};$$

$$k_1 = -\frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_1}{a}}; \quad k_2 = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_1}{a}}.$$

Зазначимо, що катеноїд деформується під дією осьового навантаження q , яке в локальній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ розкладається на компоненти в напрямі нормалі та дотичної до поверхні оболонки:

$$P_1 = q \frac{1}{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad P_3 = -q \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha_1}{a}}{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Розрахунок виконано для таких вхідних параметрів: $a = 40$ см, $b = 80$ см, модуль Юнга $E = 0,7 \cdot 10^6$ кг/см², коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, товщина оболонки $h = 2$ см, навантаження $q = 17$ кг/см², причому розглядуване навантаження є критичним.

На рис. 1–3 показано графіки переміщень серединної поверхні оболонки u_1 , u_3 та меридіального напруження σ_{11} на внутрішній поверхні оболонки. Точками позначений розв'язок, що наведений у [2] (у межах теорії Кіргофа–Лява).

11. ВИСНОВКИ

Отже, з аналізу наведених результатів обчислень випливає, що переміщення та напруження, знайдені за уточненою теорією оболонок, податливих на зсув та стиснення, практично повністю збігаються з числовими розв'язками в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна та в межах теорії Кіргофа–Лява, знайденими іншими авторами.

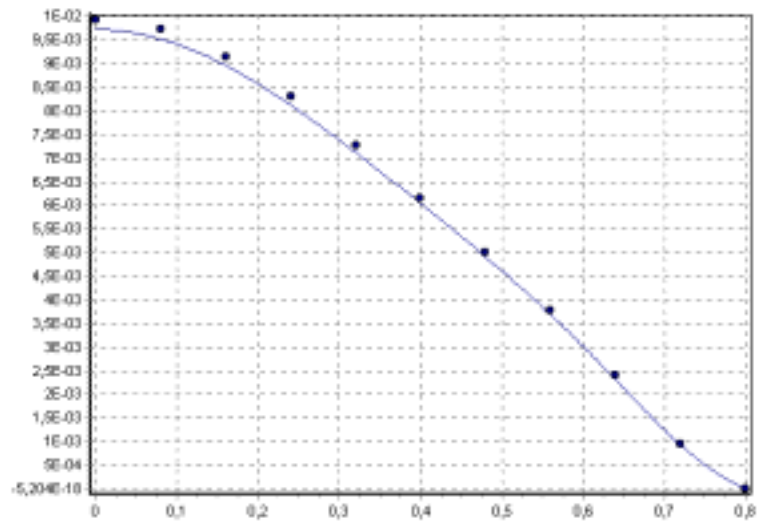


Рис. 1. Переміщення u_1 .

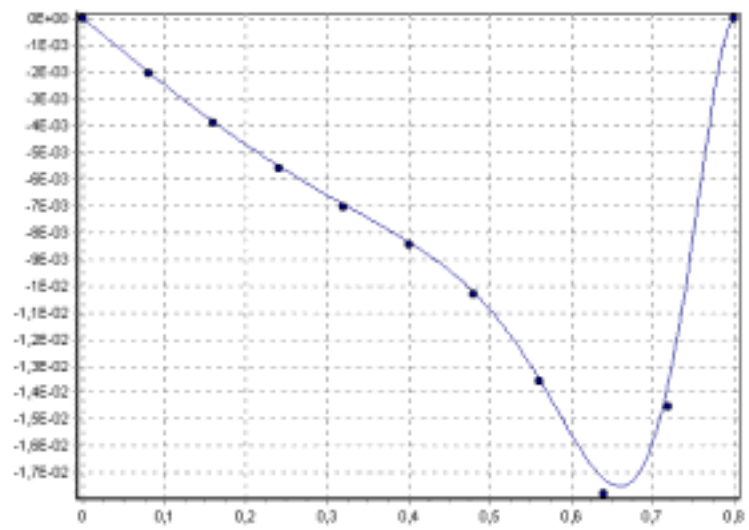


Рис. 2. Переміщення u_3 .

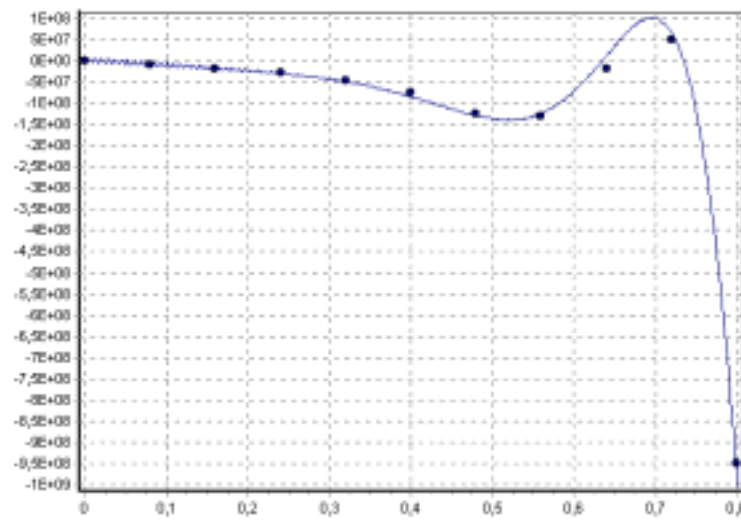


Рис. 3. Меридіальне напруження на внутрішній поверхні катеноїда.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статки зсувних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1999. Т. 42. № 2. С. 53 - 61.
2. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 286 с.
3. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 211 с.
4. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 159 с.
5. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1981. 88 с.
6. Шот І. Я. Чисельне розв'язування задач теорії зсувних оболонок методом скінченних елементів // VI всеукр. студентська наук. конф. з прикл. математики та інформатики. Львів, 2003. С. 60 - 61.

**ANALYSIS OF STRESSEDLY-DEFORMED MODE OF THIN-WALL SHELLS
AMENABLE TO SHIFT AND COMPRESSION**

P. Vahin, I. Shot

*Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: vahin@franko.lviv.ua*

The following paper considers process of geometric and linear deformation of walls which are amenable to shift and compression. Key equations of the regarded ask are recorded. Numerical solutions, received by means of consummated elements, are given. Comparison of solutions within the theory regarded in the paper is conducted, involving numerical solutions within the limits of penta-modal theory of shells, type Tymoshenko-Mindline and Kirhoff-Lyav.

Key words: Tymoshenko-Mindline shell, variational formulation of the problem.

*Стаття надійшла до редколегії 20.12.2005
Прийнята до друку 07.06.2006*