ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ | VISNYK LVIV UNIV
Сер. прикл. матем. та інформ. | Ser. Appl. Math. Comp. Sci.
2006. Вип. 11. С. 99–106 | 2006. No 11. P. 99–106

УДК 517.948

ДВО- ТА ТРИКРОКОВІ ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

С. Шахно, О. Макух

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Запропоновано нові модифікації ітераційно-різницевих методів для розв'язування нелінійних рівнянь. На багатьох тестових задачах виконано числове дослідження цих модифікацій і відомих базових методів та зроблено порівняння отриманих результатів.

Ключові слова: нелінійне рівняння, ітераційно-різницевий метод, поділена різниця, ітерація, порядок збіжності.

1. ВСТУП

Нехай F – нелінійний оператор, визначений в опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння
$$F(x) = 0 \tag{1}$$
часто застосовують відомий ітераційний метод Ньютона [3, 5, 6] та його численні модифікації, які мають в ітераційних формулах похідні першого, а то й вищих порядків. Широко використовують ітераційно-різницеві методи. Перевагою цих методів є те, що в їхніх ітераційних формулах використовують тільки значення нелінійного оператора і не потрібно аналітично заданих похідних. Тому їх можна використати і для тих задач, для яких нелегко або й неможливо отримати похідні аналітично. Найпростішим методом такого типу є метод хорд. Дослідженню цього методу присвячено багато праць [2, 5, 6, 8, 12]. Метод хорд збігається до розв'язку зі швидкістю з порядком 1.618.... В. А. Курчатов запропонував метод лінійної інтерполяції і визначив його квадратичну швидкість збіжності. Обидва методи мають в ітераційних формулах значення оператора з двох попередніх ітерацій і, відповідно, потребують двох початкових наближень. Ф. А. Потра [11] досліджував різницевий метод з порядком збіжності 1.839..., у якому використовують значення оператора з трьох попередніх ітерацій, а, отже, потрібне задання трьох початкових наближень. У працях [1, 6, 13, 15] досліджено різницевий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, який також потребує двох початкових наближень. Усі згадані методи автори досліджували з різних підходів. Ми вивчили ці методи з єдиного погляду [8, 9, 13, 14] за схемою Ф.А. Потра [11], причому за слабших вимог до гладкості нелінійного оператора рівняння. Це дало нам змогу порівняти всі згадані методи за швидкістю збіжності та за областю збіжності (радіусом збіжності). Водночас числові експерименти свідчать, що нема універсального методу розв'язування нелінійних задач. Тому потреба у побудові нових, ефективніших у певному сенсі методів (зокрема, за кількістю обчислень, за кількістю ітерацій) не зникає. Нижче запропоновано нові методи для розв'язування нелінійних рівнянь і на низці відомих тестових задач виконано числове дослідження цих методів та відомих методів аналогічного класу.

2. ІТЕРАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВІ ПРОЦЕСИ

Розглянемо нелінійне операторне рівняння вигляду (1).

Лінійний оператор з X в Y, який позначають $F(x, y)$, називають поділеною різницею оператора F за точками x і y $(x \neq y)$, якщо він задовольняє умову

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{2}$$

Нехай x, y – дві точки області $D \in X$. Розглянемо ітераційні процеси, які можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{3}$$

Зокрема, в методі хорд

$$A_n = F(x_n, x_{n-1}). \tag{4}$$

Запропонований В. А. Курчатовим [4] метод містить

$$A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}). \tag{5}$$

У дослідженому Ф. А. Потра методі [11] A_n є лінійною комбінацією поділених різниць від F у вигляді

$$A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1}). \tag{6}$$

Як відомо [11], цей метод збігається локально з порядком збіжності 1.839....

У книзі Дж. Трауба [6] для одного нелінійного рівняння наведено ще один метод з порядком збіжності 1.839..., який легко узагальнити на випадок систем нелінійних рівнянь:

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(x_n, x_{n-1})^{-1} + F(x_{n-2}, x_n)^{-1} - F(x_{n-2}, x_{n-1})^{-1}\right] F(x_n), n = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

На відміну від методу (3), (6), в ітераційному процесі (7) використовують лінійну комбінацію трьох обернених операторів, що передбачає розв'язування на одній ітерації трьох лінійних систем, причому з різними матрицями.

У працях [1, 13, 15] досліджено метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_{n+1}); \quad n = 0,1,..., \end{aligned} \tag{8}$$

де x_0 і y_0 – задані початкові значення. Його природно вважати двокроковою модифікацією саме методу хорд (3), (4), у якій замість значення x_{n-1} з попередньої ітерації беруть допоміжну точку y_n, обчислену подібним способом. У результаті порядок збіжності методу збільшився від $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ до $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$.

Аналогічно до (8) модифікуємо метод В.А. Курчатова (3), (5), який має вищий, ніж у методу хорд, квадратичний порядок збіжності. У цьому випадку пропонуємо два варіанти:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(2x_n - y_n, y_n)]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(2x_n - y_n, y_n)]^{-1} F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,... \end{aligned} \tag{9}$$

та

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(2y_n - x_n, x_n)\right]^{-1} F(x_n),$$
$$y_{n+1} = x_{n+1} - \left[F(2y_n - x_n, x_n)\right]^{-1} F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,.... \tag{10}$$

У методі (9) використана симетрична апроксимація значення оператора $F'(x)$ в околі точки x_n, а в методі (10) – також симетрична апроксимація значення оператора $F'(x)$, але в околі точки y_n. У всіх трьох методах (8)–(10) на кожній ітерації потрібно розв'язувати по дві лінійні системи рівнянь, які мають спільну матрицю, або, інакше кажучи, одну систему з двома різними правими частинами. Отже, прямий хід методу Ґаусса чи методу відбиттів можна виконати один раз, і два рази зворотний хід. Проте у методі (10), як і в (8), на кожній ітерації треба обчислювати оператор $F(x)$ у двох нових точках, тоді як у методі (9) – у трьох нових точках.

Метод (3),(6) побудовано за допомогою трьох членів інтерполяційної формули Ньютона і з використанням інформації з трьох останніх ітерацій, тоді як метод хорд (3), (4) – за допомогою тільки двох членів цієї ж формули і, відповідно, він використовує два члени формули. У результаті порядок збіжності методу (3), (6) дорівнює 1.839… проти 1.618… для методу хорд.

На кожній ітерації методу (3),(6) треба обчислювати лінійний оператор, який є алгебричною сумою трьох поділених різниць, і розв'язувати лінійне операторне рівняння. Оскільки це потребує багато обчислень, то ми пропонуємо таку трикрокову модифікацію методу (3), (6):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_n^{-1} F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - A_n^{-1} F(x_{n+1}); \\ z_{n+1} &= y_{n+1} - A_n^{-1} F(y_{n+1}); \\ A_{n+1} &= F(z_{n+1}, y_{n+1}) + F(x_{n+1}, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0,1,.... \end{aligned} \tag{11}$$

У методі (11) на одній ітерації необхідно розв'язувати три системи лінійних рівнянь з однією і тією ж матрицею. Оскільки в разі розв'язування лінійних систем основний об'єм обчислень припадає на прямий хід методу Ґаусса (LU-розклад чи QR-розклад матриці), що становить $O(n^3)$ арифметичних операцій, а на зворотний хід (розв'язування двох систем з трикутною матрицею або однієї системи з трикутною матрицею та множення матриці на вектор) тільки $O(n^2)$ таких операцій, то обчислювальна вартість однієї ітерації (11) близька до вартості ітерації методу (3), (6).

Зазначимо, що метод хорд (3), (4), метод В.А. Курчатова (3), (5) та двокрокові методи (8)–(10) потребують двох початкових наближеннь x_0, x_{-1}, а методи (3), (6) та (7) – трьох початкових наближеннь x_0, x_{-1}, x_{-2}. Для роботи методу (11) потрібно задати початкові наближення x_0, A_0.

3. ЧИСЛОВА АПРОБАЦІЯ МЕТОДІВ

Для виявлення реальних властивостей розглянутих вище методів виконано числовий експеримент. Методи протестовано на 13 системах нелінійних рівнянь. Їх реалізовано в Delphi. Для всіх методів використовували однакові критерії припинення обчислювального процесу. Поділену різницю першого порядку визначали за формулою [11]

$$F(z,y)_{ij} = \frac{F(z_1,\ldots,z_j,y_{j+1},\ldots,y_n) - F(z_1,\ldots,z_{j-1},y_j,\ldots,y_n)}{z_j - y_j}. \qquad (12)$$

Розв’язки задач шукали з точністю $\varepsilon = 10^{-12}$. Додаткові початкові наближення будували так:

$$x_{-1} = x_0 - 10^{-6};$$

$$x_{-2} = x_0 - 2\cdot 10^{-6}.$$

Наведемо низку тестових задач, які використано в числовому експерименті.

Приклад 1. Функція Розенброка [10]

$$F_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2); \quad F_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2};$$

$$x_0 = (-1.2; 1; \ldots; -1.2; 1); \ x^* = (1; 1; \ldots; 1; 1); \ n = 4; \ F = 0.$$

Приклад 2. Функція Ковалика та Осборна [10]

$$F_i(x) = y_i - \frac{x_1(u_i^2 + u_i x_2)}{u_i^2 + u_i x_3 + x_4};$$

$$y = (0.1957; 0.1947; 0.1735; 0.1600); \ u = (4.0000; 2.0000; 1.0000; 0.5000);$$

$$x_0 = (0.25; 0.39; 0.415; 0.39); \ x^* = (0.1995; 0.2085; 0.2171; 0.2954); \ F = 0.$$

Приклад 3. Box-3D функція [10]

$$F_i(x) = e^{-t_i x_1} - e^{-t_i x_2} - x_3(e^{-t_i} - e^{-10 t_i});$$

$$t_i = 0.1i; \ x_0 = (0; 10; 20); \ x^* = (1; 10; 1); \ F = 0.$$

Приклад 4. Функція Вуда [10]

$$F_1(x) = 10(x_2 - x_1^2); \ F_2(x) = 1 - x_1; \ F_3(x) = \sqrt{90}(x_4 - x_3^2); \ F_4(x) = 1 - x_3;$$

$$x_0 = (-3; -1; -3; -1); \ x^* = (1; 1; 1; 1); \ F = 0.$$

Приклад 5. Функція [10]

$$F_1(x) = x_1 - 13 + x_2(x_2(5 - x_2) - 2); \ F_2(x) = x_1 - 29 + x_2(x_2(x_2 + 1) - 14);$$

$$x_0 = (15; -2); \ x^* = (5; 4); \ F = 0.$$

Приклад 6. З необхідної умови мінімуму функції

$$\Phi(x) = x_1^2 + 100(x_1^2 - x_1 - x_2)^2$$

отримуємо таку систему нелінійних рівнянь

$$F_1(x) = 2x_1 + 200(x_1^2 - x_1 - x_2)(2x_1 - 1) = 0; \ F_2(x) = -200(x_1^2 - x_1 - x_2) = 0;$$

$$x_0 = (1; 1); \ x^* = (0; 0).$$

Приклад 7. “Погана” функція Пауелла [10]

$$F_1(x) = 10^4 x_1 x_2 - 1; \ F_2(x) = e^{-x_1} + e^{-x_2} - 1.0001;$$

$$x_0 = (0; 1); \ x^* = (1.098...10^{-5}; 9.106...); \ F = 0.$$

Приклад 8. Сингулярна функція Пауелла [10]

$$F_1(x) = x_1 + 10x_2;\ F_2(x) = \sqrt{5}(x_3 - x_4);$$
$$F_3(x) = (x_2 - 2x_3)^2;\ F_4(x) = \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2;$$
$$x_0 = (3;-1;0;1);\ F = 0.$$

Приклад 9. Тригонометрична функція [10]

$$F_i(x) = n - \sum_{j=1}^{n} \cos x_j + i(1 - \cos x_i) - \sin x_i;$$
$$x_0 = (\frac{1}{n};\frac{1}{n};...;\frac{1}{n});\ n = 4;\ F = 0.$$

Приклад 10. Функція скінченно-різницевої крайової задачі [10]

$$F_i(x) = 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} + h^2(x_i + t_i + 1)^3/2;$$
$$h = 1/(n+1);\quad t_i = ih;\quad x_0 = x_{n+1} = 0;$$
$$x_0 = (\xi_i);\quad \xi_i = t_i(t_i - 1);\ F = 0.$$

Приклад 11. Тридіагональна функція Бройдена [10]

$$F_i(x) = (3 - 2x_i)x_i - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1;\quad x_0 = x_{n+1} = 0;$$
$$x_0 = (-1;-1;...;-1);\ F = 0;\ n = 4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

Приклад 12. Об’єднана функція Бройдена [10]

$$F_i(x) = x_i(2 + 5x_i^2) + 1 - \sum_{j \in J_i} x_j(1 + x_j);$$
$$J_i = \{j : j \neq i, \max(1, i - m_l) \leq j \leq \min(n, i + m_u)\};$$
$$m_l = 5;\quad m_u = 1;\ x_0 = (-1;-1;...;-1);\ F = 0;\ n = 4.$$

Приклад 13. Розглянемо крайову задачу

$$x'' + x^{2+p} = 0,\quad p \in (0,1];\quad x(0) = x(1) = 0. \tag{13}$$

Різницевим аналогом цієї задачі є система нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - h^2 x_1^{2+p} = 0, \\ &-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} - h^2 x_i^{2+p} = 0,\quad i = 2,\ldots,n-1, \\ &-x_{n-1} + 2x_n - h^2 x_n^{2+p} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

яку запишемо у матрично-векторному вигляді $F(x) = Ax - H(x) = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix},\quad H(x) = h^2 \begin{pmatrix} x_1^{2+p} \\ \vdots \\ x_i^{2+p} \\ \vdots \\ x_n^{2+p} \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поділену різницю першого порядку визначимо за формулою (12). Тоді

$$F(z, y) = A - h^2 \operatorname{diag}\left\{ \frac{z_1^{2+p} - y_1^{2+p}}{z_1 - y_1}, \frac{z_2^{2+p} - y_2^{2+p}}{z_2 - y_2}, \ldots, \frac{z_n^{2+p} - y_n^{2+p}}{z_n - y_n} \right\}.$$

Під час розв'язування цієї задачі початкове та додаткові наближення виберемо так: $x_0^{(i)} = 5\sin(\pi t_i)$, $x_{-1}^{(i)} = x_0^{(i)} - 10^{-4}$, $x_{-2}^{(i)} = x_0^{(i)} - 2 \cdot 10^{-4}$, $y_0^{(i)} = x_0^{(i)} + 10^{-4}$, $z_0^{(i)} = x_0^{(i)} + 2 \cdot 10^{-4}$ Тут верхній індекс i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ означає i-ту компоненту відповідного вектора наближень. Обчислення проводились з точністю $\varepsilon = 10^{-10}$.

Для порівняння швидкості збіжності описаних вище методів у табл. 1–2 наведено кількість ітерацій, за які отримано розв'язки тестових прикладів. Знак „--" у таблицях означає, що розв'язок задачі даним методом не вдалось отримати.

Таблиця 1

Порівняння одно- та двокрокових ітераційних процесів

Приклад	Метод					
	Ньютона	(3), (4)	(3), (5)	(8)	(9)	(10)
1	3	4	3	3	2	3
2	5	6	6	4	4	4
3	6	8	6	5	6	5
4	3	3	3	3	3	3
5	44	20	46	9	36	52
6	7	9	--	7	7	--
7	14	19	16	12	14	10
8	42	58	55	34	41	28
9	7	9	7	7	7	7
10	4	5	4	3	4	4
11	6	7	6	5	5	5
12	7	9	7	6	6	5
13	5	6	5	4	4	4

Таблиця 2

Порівняння одно- та трикрокових ітераційних процесів

Приклад	Метод			
	Ньютона	(3), (6)	(7)	(11)
1	3	4	4	2
2	5	5	6	3
3	6	6	7	4
4	3	4	4	2
5	44	27	--	14
6	7	6	--	9
7	14	27	17	11
8	42	42	53	23
9	7	8	--	12
10	4	4	4	3
11	6	6	7	4
12	7	7	8	5

13	5	6	6	3

Нижче наведено початкове наближення й отриманий розв'язок нелінійної крайової задачі (13) у випадку $n=9$ і $p=\frac{1}{2}$:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}0000000000 \\ 1{,}5450849718 \\ 2{,}9389262614 \\ 4{,}0450849718 \\ 4{,}7552825814 \\ 5{,}0000000000 \\ 4{,}7552825814 \\ 4{,}0450849718 \\ 2{,}9389262614 \\ 1{,}5450849718 \\ 0{,}0000000000 \end{pmatrix}, \quad x^* \approx \begin{pmatrix} 0{,}0000000000 \\ 1{,}4521511950 \\ 2{,}8788909315 \\ 4{,}1650055082 \\ 5{,}0970909937 \\ 5{,}4426252262 \\ 5{,}0970909937 \\ 4{,}1650055082 \\ 2{,}8788909315 \\ 1{,}4521511950 \\ 0{,}0000000000 \end{pmatrix}.$$

4. ВИСНОВКИ

Отже, на підставі виконаних розрахунків та порівняння отриманих результатів бачимо, що двокрокові методи (8)–(10) за кількістю ітерацій практично не відрізняються і швидше збігаються, ніж метод Ньютона та метод хорд (див. табл. 1). З табл. 2 видно, що для розв'язування нелінійних систем рівнянь метод (7) рекомендувати не можна, а натомість досить ефективним виявився трикроковий метод (11). Експерименти свідчать, що швидкість збіжності ітерацій для задачі 11 практично не залежить від розмірності нелінійної системи. Аналогічні висновки можна зробити і за результатами розв'язування задачі 13.

Наведені результати числових розрахунків дають змогу стверджувати, що швидкість збіжності ітераційного процесу (11) вище ніж $1+\sqrt{2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бартіш М. Я., Щербина Ю. М.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1972. №7. С. 579–582.
2. *Дэннис Дж., мл., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
4. *Курчатов В. А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. 1971. Т. 198. № 3. С. 524–526.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
6. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений / Пер. с англ. И.А.Глинкина / Под ред. А.Г. Сухарева. М.: Мир, 1985.
7. *Ульм С.* Об обобщенных разделенных разностях // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1967. Т. 16. С. 13–26. С. 146–156.

8. *Шахно С. М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь // Матем. студії. 2004. Т. 22. №1. С.79–86.
9. *Шахно С. М., Макух О. М.* Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 124–131.
10. *J. J. More, B. S. Garbow, K. E. Hillstrom.* Testing unconstrained optimization software // ACM Transaction on Mathematical Software. 1981. Vol. 7. № 1. P. 17–41.
11. *Potra F. A.* On an iterative algorithm of order 1.839… for solving nonlinear operator equations // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1984–85. 7(1) . P. 75–106.
12. *Schwetlick H.* Numerische Lösung Nichtlinearer Gleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1979.
13. *Shakhno S. M.* Method of order $1+\sqrt{2}$ for the solution of nonlinear equations with Hölder continuous divided differences // Proc. Appl. Math. Mech. 2005. Vol. 5. C. 779–780.
14. *Shakhno S. M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations // Proc. Appl. Math. Mech. 2004. Vol. 4. C. 650–651.
15. *Werner W.* Űber ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. 1979. Vol. 32. S. 333–342.

TWO- AND THREE-STEP ITERATIVE PROCESSES FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

S. Shakhno, O. Makukh

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail:kom@franko.lviv.ua

New modifications of the itterative-difference methods are proposed. In many testing problems a numerical investigation of these modifications and the known basis methods is conducted. The received results are compared.

Key words: nonlinear equation, iterative difference processes, divided differences, convergence order.

Стаття надійшла до редколегії 11.12.2005
Прийнята до друку 31.05.2006