ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. та інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2005. Вип. 10. С. 127–137 *2005. No 10. P. 127–137*

УДК 539.3

ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ І ЗНАХОДЖЕННЯ ТРИВИМІРНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРА

В. Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, м. Львів

Проінтегровано рівняння Ляме тривимірної теорії пружності (в декартовій системі координат). Доведено, що їхній загальний розв'язок виражається тільки через три гармонічні функції. Наведено вираз вектора пружних переміщень в циліндричній системі координат. Побудовано три набори власних функцій, які задовольняють нульові граничні умови в напруженнях на торцях. Знайдено збурений напружено-деформований стан циліндра, навантаженого на боковій поверхні.

Ключові слова: Тривимірна теорія пружності, рівняння Ляме, напружено-деформований стан циліндра, крайова задача, основний і збурений напружений стан.

1. ВСТУП

Знаходження напружено-деформованого стану (НДС) довільно навантаженого скінченного пружного циліндра є важливою практичною проблемою, якій присвячено чимало праць [1, 3, 4, 11]. У праці [11], наведено огляд матеріалів з цієї проблемит і зазначено, що головним способом розв'язування є метод розкладу по власних функціях у циліндричній системі координат. У випадку використання цього методу необхідно попередньо виділити основний напружений стан (який відповідає заданим головним векторам зусиль і моментів) і уже для збуреної (самозрівноваженої відносно координатної поверхні) частини ставити відповідну крайову задачу для визначення власних функцій, які описують цей збурений напружений стан. Для осесиметричного навантаження цей підхід розвинуто в роботі [5]. Зазначимо, що виділення збуреного напруженого стану доцільне, його використовують у разі застосування числових та наближених методів розв'язування тривимірних задач теорії пружності [1, 11].

Нижче побудовано загальний розв'язок тривимірних рівнянь Ляме і з'ясовано, що існує тільки три незалежні функції, через які виражається розв'язок. Доведено, що збурений напружений стан у навантаженому скінченому циліндрі можна виразити через побудовані власні функції, які задовольняють нульові граничні умови в напруженнях на торці циліндра.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Знайдемо НДС ізотропного циліндра радіуса R, висоти $2h$ у циліндричній системі координат (r, φ, x) за формулюванням постановці тривимірної теорії пружності. Одночасно з циліндричною будемо розглядати декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). Приймемо, що у введених системах координата x_3 збігається з - x. На торцях циліндра $x = \pm h$ нема навантаження, тобто задано нульові граничні умови в напруженнях

$$\sigma_x(r,\varphi,\pm h) = 0, \quad \tau_{x\varphi}(r,\varphi,\pm h) = 0, \quad \tau_{rx}(r,\varphi,\pm h) = 0\,. \tag{1}$$

Після виділення основного навантаження залишиться збурене зовнішнє навантаження, яке діє на боковій поверхні циліндра $r = R$ і, відповідно, складається із симетричного й антисиметричного розподілу нормальних напружень. Для визначеності розглянемо симетричні відносно кута φ нормальні напруження [3]

$$\sigma_r(R,\varphi,x) = \sigma_g(\varphi,x) \cong \sum_{n=0}^{M} \sigma_{g,n}(x)\cos n\varphi\,,$$

$$\tau_{rx}(R,\varphi,x) = \tau_1(\varphi,x) \cong \sum_{n=0}^{M} \tau_{1,n}(x)\cos n\varphi\,,$$

$$\tau_{r\varphi}(R,\varphi,x) = \tau_2(\varphi,x) \cong \sum_{n=0}^{M} \tau_{2,n}(x)\sin\varphi\,, \tag{2}$$

де зовнішні навантаження $\sigma_g(\varphi,x)$, $\tau_1(\varphi,x)$, $\tau_2(\varphi,x)$ – задані кусково-неперервні і квадратично інтегровані функції на поверхні циліндра. Кількість членів ряду M вибираємо з умови заданої точності апроксимації зовнішніх навантажень скінченним рядом Фур'є. Для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) теорії пружності знайдемо загальний розв'язок рівнянь Ляме в інваріантному вигляді і використаємо його в циліндричній системі координат.

3. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ В ІНВАРІАНТНОМУ ВИГЛЯДІ

Виразимо загальний розв'язок рівнянь Ляме через гармонічні функції в декартовій системі координат. Сьогодні відомо декілька зображень загального розв'язку [4, 8, 10, 11], які використовують від двох до чотирьох незалежних гармонічних функцій. Доведемо, що у виразі розв'язку є тільки три незалежні функції. Рівняння Ляме в переміщеннях [3,10] запишемо у векторному вигляді:

$$\alpha\nabla^2\mathbf{u} + grad\, e = 0\,, \tag{3}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа; $e = div\,\mathbf{u} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$ – об'ємне розширення; $\alpha = 1 - 2\nu$; ν – коефіцієнт Пуассона; $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ – вектор пружних переміщень; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – одиничні орти декартової системи координат. Для побудови тривимірного вектора пружних переміщень необхідно використовувати набір функцій, які можна вважати векторами [11].

Під час дослідження рівнянь Ляме будемо виходити із розв'язків бігармонічного рівняння, яке задовольняє кожна компонента вектора пружних переміщень [10]. При розв'язуванні цих рівнянь необхідно виділити окремо три класи розв'язків, а саме: I) гармонічні, і II) бігармонічні функції як комбінації тригонометричних і гіперболічних функцій трьох змінних; III) поліноми трьох або двох змінних. Відповідно до цього, під час пошуку розв'язків рівнянь Ляме розглянемо три випадки.

3.1. Кожна компонента вектора переміщень є гармонічна функція. В цьому випадку із рівнянь Ляме (3) випливає, що об'ємне розширення буде сталим, а саме векторне рівняння набуде спрощеного вигляду

$$\nabla^2\mathbf{u} = 0\,, \quad e = div\,\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = C\,, \tag{4}$$

де C – стала. Загальний розв'язок системи рівнянь (4) розіб'ємо на частковий поліномний, який враховує наявність сталої в правій частині й однорідний гармонічний без поліноміальних членів.

Означення. Суттєво гармонічною функцією від трьох змінних будемо називати розв'язок рівняння Лапласа, який не містить часткового поліноміального розв'язку ІІІ. Векторне поле переміщень будемо називати гармонічним, якщо кожна його компонента є суттєво гармонічною функцією.

Теорема 1. Розв'язок рівнянь Ляме винятково у класі гармонічних векторних полів має нульове об'ємне розширення і його завжди можна задати у вигляді

$$\mathbf{u} = grad\,\Psi + rot\,Q\,\mathbf{k}\,, \tag{5}$$

де Ψ і G – довільні гармонічні функції.

Доведення. За означенням, у залежностях (4) необхідно прийняти $C = 0$. Легко перевірити, що поле переміщень, задане у вигляді градієнта

$$\mathbf{u} = grad\,\Psi\,,$$

де Ψ – довільна гармонічна функція, є розв'язком системи рівнянь (4). Довільне гармонічне поле переміщень, яке задовольняє рівняння (4) (при $C = 0$), завжди можна записати у вигляді

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, \tag{6}$$

де ψ_j, $j = \overline{1,3}$ – гармонічні функції. Внаслідок довільності Ψ приймемо $\Psi = \psi_3$. Віднімемо від поля переміщень (6) це градієнтне поле й одержимо нове поле переміщень $\mathbf{v}$:

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \quad v_3 = 0.$$

Нескладно перевірити, що виконується рівність $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$. Отже, існує така гармонічна функція Q, що $v_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$ і правильно $\mathbf{v} = rot\,Q\,\mathbf{k}$. Теорему доведено.

Лема. Для гармонічного векторного поля $\mathbf{W}$ загальний розв'язок рівняння

$$div\,\mathbf{W} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} \tag{7}$$

можна записати у вигляді

$$\mathbf{W} = grad\,K + rot\,M\,\mathbf{k} + x_1 rot(\frac{\partial P}{\partial x_2}\mathbf{k}) - x_2 rot(\frac{\partial P}{\partial x_1}\mathbf{k})\,, \tag{8}$$

де K, M, P – довільні гармонічні функції.

Доведення. Випадок $P \equiv 0$ доведений у теоремі 1. Безпосередньо перевіряємо, що вираз (8) є розв'язком рівняння (7). Лему доведено.

Наслідок 1. *Довільне гармонічне векторне поле можна записати у вигляді (8), де окремо виділені дивергентна, градієнтна і роторна частини векторного поля.*

3.2. Компоненти вектора переміщень як бігармонічні функції трьох змінних.

Теорема 2. *Бігармонічний розв'язок рівнянь Ляме, коли компоненти вектора переміщень є бігармонічними функціями трьох змінних, можна записати з точністю до гармонічного розв'язку (5) у вигляді*

$$\mathbf{u} = x_3\, grad\Phi - (3-4\nu)\Phi\mathbf{k}\,, \tag{9}$$

де Φ *– довільна гармонічна функція трьох змінних.*

Доведення. Наведемо загальний вигляд бігармонічного розв'язку рівнянь Ляме з точністю до гармонічного розв'язку (5):

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + x_3\mathbf{B}_3\,, \tag{10}$$

де $\mathbf{B_j} = B_{j1}\mathbf{i} + B_{j2}\mathbf{j} + B_{j3}\mathbf{k}$ – гармонічні вектори. Для того, щоб вираз (10) задовольняв рівняння Ляме (3), повинні виконуватися умови

$$div\,\mathbf{B_j} \equiv 0, \quad j = \overline{1,3}\,. \tag{11}$$

Підставимо (10) у систему рівнянь (3) і одержимо систему визначальних рівнянь

$$2\alpha\left[\frac{\partial B_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{3j}}{\partial x_3}\right] + \frac{\partial N}{\partial x_j} = 0\,,\ j = \overline{1,3}\,, \tag{12}$$

де $N = B_{11} + B_{22} + B_{33}$. Знайдемо із умов (11) значення $\dfrac{\partial B_{jj}}{\partial x_j}$, підставимо їх у (12) і після перетворень замінимо рівняння (12) одним векторним рівнянням

$$2\alpha\, rot\,\mathbf{W} = grad\,N\,, \tag{13}$$

де компоненти вектора $\mathbf{W}$: $W_1 = B_{23} - B_{32}$, $W_2 = B_{31} - B_{13}$, $W_3 = B_{12} - B_{21}$. Запишемо вектор $\mathbf{W}$ у загальному вигляді (8), візьмемо від нього ротор, підставимо у рівняння (13) і після використання векторних формул [2] одержимо, що визначальні умови на функції B_{jk} набувають вигляду

$$\mathbf{W} = grad\,K + \frac{1}{2\alpha} rot\,F\,\mathbf{k}\,,\ \ B_{11} + B_{22} + B_{33} = \frac{\partial F}{\partial x_3}\,. \tag{14}$$

де K – довільна гармонічна функція.

Ми одержали сім рівнянь (11), (14), для визначення 11 невідомих гармонічних функцій. Загальний розв'язок цих рівнянь може містити чотири довільні функції. Із леми після врахування залежностей (11) випливає, що коефіцієнти B_{jk} можна записати у вигляді

$$B_{j1} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial H_j}{\partial x_2}\,,\ \ B_{j2} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_2} - \frac{\partial H_j}{\partial x_1}\,,\ \ B_{j3} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_3}\,, \tag{15}$$

де ψ_j, H_j, $j=\overline{1,3}$ – довільні гармонічні функції. Підставимо залежності (15) в умови (14), одержимо таку систему визначальних рівнянь:

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}=0\,,\quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial G_3}{\partial x_2}-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}=0\,,$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1}-\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial K}{\partial x_3}=0\,,\quad \frac{\partial G_2}{\partial x_1}-\frac{\partial G_1}{\partial x_2}+\frac{\partial(\psi_3-F)}{\partial x_3}=0\,, \tag{16}$$

де

$$G_1=H_1+\psi_3\,,\ G_2=\psi_1-H_2\,,\ G_3=H_3-K\,,\ A_1=\psi_3+F/(2\alpha)\,, \tag{17}$$

Загальний розв'язок першого визначального рівняння системи (16) запишемо у вигляді $G_3=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3}+\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}$, $A_1=\psi_3+\dfrac{F}{2\alpha}=\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_3}-\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial x_3}$, $\psi_2=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}$.

Підставимо ψ_3 в четверте рівняння (16) і після його розв'язку одержимо

$$G_1=\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1\partial x_3}\,,\ F=\beta\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}\,,\ G_2=\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_2\partial x_3}\,,$$

де $\beta=2\alpha/(2\alpha+1)$; Φ, Q, A, Π – чотири довільні гармонічні функції. Із другого і третього рівняння (16) знайдемо

$$K=-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3}\,,\ \psi_1=-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2}\,,\ F=\beta\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}\,.$$

Підставимо ці знайдені функції в зворотному порядку у співвідношення (17), (15), після громіздких обчислень знайдемо невідомі $B_{k,j}$:

$$B_{11}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1\partial x_2};\ B_{12}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1^2};\ B_{13}=-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2};$$

$$B_{21}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_2^2};\ B_{22}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1\partial x_2};$$

$$B_{23}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2};\quad B_{31}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\Big)-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_3\partial x_2}; \tag{18}$$

$$B_{32}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\Big)+\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1\partial x_3};\ B_{33}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\Big);$$

де U, Q, A, Π, – чотири довільні гармонічні функції; $b=1/(2\alpha+1)$. Безпосередньо можна перевірити, що функції B_{kj} задовольняють усі вихідні рівняння. Зазначимо, що функції U, Q, Π утворюють нові форми подання розв'язку рівнянь Ляме, і ці гармонічні вектори переміщень мають дивергенцію, що дорівнює нулю. Отже, такі вектори пружних переміщень, згідно з теоремою 1, після перепозначення можна записати у вигляді (5), тобто вони не задають бігармонічних розв'язків рівнянь Ляме. Тільки функція A задає розв'язок рівнянь Ляме у вигляді бігармонічного вектора переміщень

$$\mathbf{u} = \frac{x_3}{3-4\nu}\, grad\, \frac{\partial A}{\partial x_3} + x_1\, rot(\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial x_2}) - x_2\, rot(\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial x_1})\,. \qquad (19)$$

Вектор переміщення (19) з точністю до гармонічних розв'язків рівнянь Ляме можна записати у простішому вигляді

$$\mathbf{u} = \frac{x_3}{3-4\nu}\, grad\, \frac{\partial A}{\partial x_3} - \frac{\partial A}{\partial x_3}\mathbf{k}\,,$$

і після введення позначення $\partial A/\partial x_3 = (3-4\nu)\Phi$ він набуде вигляду (9). Теорему доведено. Розв'язок (9) після циклічної заміни змінних можна виразити ще у двох симетричних формах, які є залежні між собою, з точністю до гармонічних розв'язків рівнянь Ляме. Вирази (5), (9) задають розв'язок рівнянь Ляме через три незалежні гармонічні функції.

3.3. Знаходження основного НДС у циліндричному тілі. В працях [3, 5, 7] показано, що в разі використання спектральних методів знаходження НДС пружних тіл необхідно попередньо виділяти основний НДС. У [7] знайдено основний НДС за довільного навантаження пружного циліндра радіусом R по торцях. Наведемо розподіл компонентів тензора основного НДС за деякого навантаження пружного циліндра на боковій поверхні, а саме: зовнішнім тиском g і зусиллям P у напрямі осі x_1, яке розподілене довільним способом. У цьому випадку основний НДС відповідає таким граничним навантаженням на поверхні циліндра

$$\sigma_r(R,\varphi,x) = g + \sigma(1+\cos(2\varphi))/2\,,\quad \tau_{rx}(R,\varphi,x) \equiv 0\,,\quad \tau_{r\varphi}(R,\varphi,x) == \sigma\sin(2\varphi)/2\,,$$

де $\sigma = P/(4Rh)$.

Надалі будемо вважати, що основний НДС відомий. Після виділення основного навантаження залишиться збурене зовнішнє навантаження.

4. ЗНАХОДЖЕННЯ ВИРАЗУ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ВІЛЬНИХ ВІД НАВАНТАЖЕНЬ ТОРЦІВ ЦИЛІНДРА

У цьому випадку ми повинні побудувати такий загальний розв'язок рівнянь Ляме через гармонічні функції, щоб у його виразявно не входила змінна r. Для цього достатньо використати без зміни подання загального розв'язку рівнянь Ляме (5), (9). З урахуванням виразів градієнта і ротора [2] запишемо компоненти вектора пружних переміщень у циліндричній системі координат [8]

$$u_r = \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial Q}{r\partial\varphi} + x\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,,\ u_\varphi = \frac{\partial\Psi}{r\partial\varphi} - \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{x}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,,\ u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + (3-4\nu)\Phi\,, \quad (20)$$

де Φ, Ψ, Q – три незалежні гармонічні функції, які залежать від трьох циліндричних координат (r, φ, x). Безпосередньою підстановкою перевіряють, що переміщення (20) задовольняють рівнянням Ляме [9] у циліндричній системі координат.

4.1. Розрахунок збуреного НДС у пружному циліндрі методом розкладення в ряд за власними векторними функціями. Для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) теорії пружності використаємо загальний розв'язок рівнянь Ляме у вигляді (20). Доведемо, що граничні умови (1), (2) будуть виконуватися, якщо задати гармонічні функції Φ, Ψ, Q у такому вигляді:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \cos(n\varphi)\,, \; \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \cos(n\varphi)\,, \quad Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(n\varphi)\,, \tag{21}$$

де функції Φ_n, Ψ_n, Q_n залежать від r, x і є розв'язками рівняння

$$\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n^2}{r^2}\}\Phi_n(r,x) = 0\,. \tag{22}$$

Оскільки, метод розв'язування осесиметричної задачі спектральним методом розглянуто в [5], то надалі ми не будемо враховувати цієї задачі.

Для застосування спектрального методу необхідно знайти такі комбінації залежних від спектральних параметрів функцій Φ_n, Ψ_n, Q_n, щоб виражені через них напруження задовольняли граничні умови (1). Якщо одна із цих функцій або їхня комбінація задовольняє граничні умови (1), то їх будемо називати власними векторними функціями, оскільки вони, відповідно, задають за формулами (20) вектор пружних переміщень. Уведемо безрозмірну змінну $\gamma = x / h$, яка змінюється від -1 до 1. Оскільки функції Φ_n, Ψ_n, Q_n є розв'язками рівняння (22) і повинні бути обмежені при $r = 0$, то їх необхідно шукати у такому вигляді

$$\Phi_n = a_n h \sin(z\gamma) I_n(\beta r)\,,\; \Psi_n = b_n h^2 \cos(z\gamma) I_n(\beta r)\,,\; Q_n = c_n h^2 \cos(\eta\gamma) I_n(\lambda r)\,, \tag{23}$$

де $z = h\beta$, $\eta = h\lambda$ – безрозмірні спектральні параметри; $I_n(\beta r)$ – модифікована функція Бесселя [2]; a_n, b_n c_n, – невідомі безрозмірні коефіцієнти, які, відповідно, залежать від спектральних параметрів z, η.

Доведемо, що існує нескінченний дискретний набір спектральних параметрів z, η, за яких виконуються нульові граничні умови (1). Для цього нам потрібно виразити компоненти тензора напружень через заданий вектор переміщень (20), з урахуванням співвідношень (21), (23). Використаємо вираз тензора деформацій у циліндричній системі координат [9] та з закону Гука знайдемо для окремої гармоніки n компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^n = -2G\{z[2(1-\nu)\cos(z\gamma) + z\gamma\sin(z\gamma)]a_n + z^2\cos(z\gamma)b_n\}I_n(\beta r)\cos(n\varphi)\,;\\
&\tau_{rx}^n = G\{h\{2[z\gamma\cos(z\gamma) - (1-2\nu)\sin(z\gamma)]a_n - 2z\sin(z\gamma)b_n\}I_n^/(\beta r) -\\
&\qquad -2\eta h\sin(\eta\gamma)c_n I_n(\lambda r)/r\}\cos(n\varphi)\,;\quad \tau_{x\varphi}^n = G\{-nh\{2[z\gamma\cos(z\gamma) -\\
&-(1-2\nu)\sin(z\gamma)]a_n - 2z\sin(z\gamma)b_n\}I_n(\beta r) + \eta h\sin(\eta\gamma)c_n I_n^/(\lambda r)\}\sin(n\varphi)\,,
\end{aligned} \tag{24}$$

де $I_n^/ = \dfrac{dI_n(\lambda r)}{dr}$; G – модуль зсуву. Підставимо напруження (24) у граничні умови (1), після скорочень одержимо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими a_n, b_n:

$$\begin{aligned}
&[z\cos(z) - (1-2\nu)\sin(z)]a_n - z\sin(z)b_n = 0\,;\\
&[2(1-\nu)\cos(z) + z\sin(z)]a_n + z\cos(z)b_n = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

і одне рівняння з одним невідомим c_n

$$c_n \sin(\eta) = 0\,,$$

які мають нульові праві частини. Коефіцієнти цих рівнянь залежать від спектральних параметрів z, η, але не залежать від індексу n.

Як відомо, відмінний від нуля розв'язок системи рівнянь (25) із нульовими правими частинами можливий тільки за умови, коли її визначник дорівнює нулю. Відмінний від нуля розв'язок одного рівняння можливий тільки тоді, коли коефіцієнт біля невідомого, який залежить від спектрального параметра η, дорівнює нулю. Із цих умов власні спектральні значення z будемо знаходити як нулі трансцендентної функції

$$F(z) \equiv \sin(2z) + 2z . \tag{26}$$

Відповідно, власні спектральні значення η знаходитимимо як нулі рівняння $\sin(\eta) = 0$, додатні корені якого мають значення

$$\eta_k = \pi k, \quad k = 1,2,3... \tag{27}$$

і утворюють зліченну множину. В праці [6] з'ясовано, що функція $F(z)$ також має зліченну кількість нулів $z_k = h\beta_k$, і наведено їхні асимптотичні значення. Всі корені рівняння (26) (крім $z_0 = 0$) є комплексно-спряженими. Із граничних рівнянь (25) випливає, що для кожного комплексного спектрального значення z_k комплексні коефіцієнти $a_{n,k}$ і $b_{n,k}$ у виразі (23) для власних функцій лінійно пов'язані між собою:

$$b_{n,k} = \delta(z_k) a_{n,k} , \tag{28}$$

де $\delta(z) = -[2(1-\nu)/z + th(z)]$. Отже, для знайдених власних значень z_k сума двох комплексних функцій $\Phi_{n,k}$ і $\Psi_{n,k}$ (21), (23) у разі виконання умови (28) стає власною векторною функцією. Оскільки в цю власну комплексну функцію входить комплексний коефіцієнт $a_{n,k}$ і відомі комплексні функції, а переміщення є дійсними функціями, то в співвідношеннях (20), (21), (23) ми повинні вибирати тільки дійсну частину. Очевидно, що з кожним комплексним коефіцієнтом $a_{n,k}$ пов'язані дві власні дійсні функції. Для знайдених власних значень параметрів η_k сама дійсна функція Q_n є власною функцією.

Розмістимо корені z_k, а також η_k у порядку зростання їхніх дійсних частин. Наведемо загальний вигляд компонентів вектора збурених пружних переміщень без урахування осесиметричних деформацій, виражених через зліченну суперпозицію трьох наборів власних функцій

$$u_r = h^2 \sum_{n=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} \{\mathrm{Re}\{[\delta(z_k)\cos(z_k\gamma) + \gamma\sin(z_k\gamma)] I_n^{/}(\beta_k r) a_{n,k}\} +$$

$$+ n c_{n,k} \cos(k\pi\gamma) I_n(\lambda_k r)/r\} \cos(n\varphi), \quad u_\varphi = h^2 \sum_{n=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} \{-n\,\mathrm{Re}\{[\delta(z_k)\cos(z_k\gamma) +$$

$$+ \gamma\sin(z_k\gamma)] I_n(\beta_k r) a_{n,k}\}/r - c_{n,k}\cos(k\pi\gamma) I_n^{/}(\lambda_k r)\} \sin(n\varphi), \tag{29}$$

$$u_x = h\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{Re}\{[z_k\gamma\cos(z_k\gamma) - (z_k\delta(z_k) + 3 - 4\nu)\sin(z_k\gamma)]I_n(\beta_k r)a_{n,k}\}\cos(n\varphi).$$

Переміщення (29) задовольняють граничні умови (1) за довільних значень комплексних коефіцієнтів $a_{n,k}$ і дійсних коефіцієнтів $c_{n,k}$. Використаємо вираз тензора деформацій у циліндричній системі координат [8], та з закону Гука визначимо компоненти тензора напружень:

$$\sigma_r = 2G\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{Re}\{a_{n,k}\{h^2[\delta(z_k)\cos(z_k\gamma) + \gamma\sin(z_k\gamma)]I_n^{//}(\beta_k r) - 2\nu z_k \times$$
$$\times\cos(z_k\gamma)I_n(\beta_k r)\}\} + h^2 n c_{n,k}[I_n^{/}(\lambda_k r)/r - I_n(\lambda_k r)/r^2]\cos(k\pi\gamma)\}\cos(n\varphi);$$
$$\sigma_\varphi = 2G\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{Re}\{-2\nu z_k a_{n,k}\cos(z_k\gamma)I_n(\beta_k r) + h^2 a_{n,k}[\gamma\sin(z_k\gamma) +$$
$$+\delta(z_k)\cos(z_k\gamma)][I_n^{/}(\beta_k r) - n^2 I_n(\beta_k r)/r]/r\} +$$
$$+nh^2 c_{n,k}\cos(k\pi\gamma)[I_n(\lambda_k r)/r^2 - I_n^{/}(\lambda_k r)/r]\}\cos(n\varphi); \quad (30)$$
$$\tau_{r\varphi} = 2G\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}\{-2nh^2\,\mathrm{Re}\{a_{n,k}[\delta(z_k)\cos(z_k\gamma) + \gamma\sin(z_k\gamma)][\frac{I_n^{/}(\beta_k r)}{r} - \frac{I_n(\beta_k r)}{r^2}]\} -$$
$$-h^2 c_{n,k}[I_n^{//}(\lambda_k r) - I_n^{/}(\lambda_k r)/r + n^2 I_n(\lambda_k r)/r^2]\cos(k\pi\gamma)\}\sin(n\varphi);$$
$$\tau_{rx} = hG\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{Re}\{2a_{n,k}[z_k\gamma\cos(z_k\gamma) - [z_k\delta(z_k) + 1 - 2\nu]\sin(z_k\gamma)]I_n^{/}(\beta_k r)\} -$$
$$-nk\pi c_{n,k}\sin(k\pi\gamma)I_n(\lambda_k r)/r\}\cos(n\varphi).$$

Як бачимо, розв'язування тривимірної задачі розрахунку НДС пружного циліндра зводиться до знаходження набору таких комплексних $a_{n,k}$ і дійсних коефіцієнтів $c_{n,k}$ для фіксованої гармоніки n, який задовольнив би граничні умови в напруженнях (2) на боковій поверхні циліндра. Підставимо напруження (30) в граничні умови (2), прирівняємо до нуля коефіцієнти біля функцій $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ одержимо три нескінченні послідовності рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{x_{n,3k-2}\,\mathrm{Re}V_{m,k}^{n} - x_{n,3k-1}\,\mathrm{Im}V_{m,k}^{n} + x_{n,3k}W_{m,k}^{n}\} = N_{n,m}, \quad (31)$$

де

$$m = \overline{1,3};\; n = \overline{1,M};\; N_{1,m} = \sigma_{g,n}(h\gamma);\; N_{2,m} = \tau_{1,n}(h\gamma);\; N_{3,m} = \tau_{2,n}(h\gamma);$$
$$x_{n,3k-2} = \mathrm{Re}\,a_{n,k};\; x_{n,3k-1} = \mathrm{Im}\,a_{n,k};\; x_{n,3k} = c_{n,k};\; \varepsilon = h/R;\; \delta_1 = R/h;$$
$$V_{2,k}^{n} = 2h\{z_k\gamma\cos(z_k\gamma) - [(1-2\nu) + z_k\delta(z_k)]\sin(z_k\gamma)\}I_n^{/}(z_k\delta_1);$$
$$V_{1,k}^{n} = 2\{[h^2\delta(z_k)I_n^{//}(z_k\delta_1) - 2\nu z_k I_n(z_k\delta_1)]\cos(z_k\gamma) + \gamma h^2 I_n^{//}(z_k\delta_1)\sin(z_k\gamma)\};$$
$$W_{1,k}^{n} = n\varepsilon^2[RI_n^{/}(k\pi\delta_1) - I_n(k\pi\delta_1)]\cos(k\pi\gamma);\; W_{2,k}^{n} = -nk\pi\varepsilon\sin(k\pi\gamma)I_n(k\pi\delta_1);$$
$$V_{3,k}^{n} = -2n\varepsilon^2[\delta(z_k)\cos(z_k\gamma) + \gamma\sin(z_k\gamma)][RI_n^{/}(z_k\delta_1) - I_n(z_k\delta_1)];$$

$$W_{3,k}^{n} = -\varepsilon^2[R^2 I_n^{//}(k\pi\delta_1) - R I_n^{/}(k\pi\delta_1) + n^2 I_n(k\pi\delta_1)]\cos(k\pi\gamma);$$

$$I_n^{/}(\beta_k R) = I_n^{/}(z_k\delta_1) = z_k[I_{n-1}(z_k\delta_1) + I_{n+1}(z_k\delta_1)]/(2h);$$

$$I_n^{//}(\beta_k R) = I_n^{//}(z_k\delta_1) = z_k^2[I_{n-2}(z_k\delta_1) + 2I_n(z_k\delta_1) + I_{n+2}(z_k\delta_1)]/(4h^2).$$

Нескінченні системи функціональних граничних рівнянь (31) від однієї змінної задають розклад трьох зовнішніх навантажень, заданих для $-1 \le \gamma \ge 1$, за трьома зліченними наборами власних функцій. Для розв’язання граничних рівнянь вигляду (31) і знаходження невідомих коефіцієнтів $x_{n,j}$ у працях [5, 6] запропоновано і розроблено метод інтегральних моментів, який є узагальненням схеми Штурма - Ліувілля. Після використання цих методів визначимо значення комплексних невідомих $a_{n,k}$ і дійсних $c_{n,k}$ із заданою точністю. Далі за (29), (30) знайдемо збурений НДС пружного циліндра без осесиметричної частини. Додамо осесиметричні складові і основний НДС, знайдемо повний НДС, який виникає у пружному циліндрі в разі навантаження на боковій поверхні.

5. ВИСНОВКИ

Систематизовано відомі вирази переміщень вектора пружних і одержано нові. Знайдено загальний розв’язок рівнянь Ляме і виражено його через гармонічні функції. Доведено, що існує тільки три незалежні гармонічні функції у поданні розв’язку. Наявність трьох незалежних гармонічних функцій дає змогу однозначно задовольнити три граничні умови на поверхні тривимірного тіла. З’ясовано, що, крім гармонічних функцій, потрібно розглядати поліноміальні розв’язки, які враховують дію головного вектора і моменту зусиль прикладених до тіла. Одержані подання вектора переміщень дають змогу знайти напруження у пружному циліндрі. Отримано нові вирази вектора пружних переміщень, які знайдуть широке застосування для розв’язування конкретних задач механіки деформівного твердого тіла. Надалінеобхідно дослідити розв’язки рівнянь Ляме, які є комбінаціями бігармонічних функцій двох змінних.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Березюк Т.Б., Григоренко А.Я., Дыяк И. И.* Решение задачи в напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Прикл. механика. 2003. Т. 39. № 10. С. 69-74.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1974. 831 с.
3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Ревенко В.П.* Знаходження напружено-деформованого стану товстостінного циліндра, навантаженого довільними торцевими зусиллями // Доп. НАН України. 2004. №1. С.55-61.
6. *Ревенко В.П.* Побудова розв’язку плоскої задачі теорії пружності для прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Доп. НАН України 2004. № 8. С. 59-65.
7. *Ревенко В.П.* Визначення компонентів основного напружено-деформованого стану у пружному циліндрі // Доп. НАН України. 2005. № 8. С. 43-48.

8. *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1977. 216 с.
9. *Слободянский М.Г.* Общие формы решения уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18. № 1. С. 55-74.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
11. *Улитко А.Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. К.: Академпериодика, 2002. 342 с.

CONSTRUCTION OF GENERAL PRESENTATIONS OF SOLUTIONS TO LAME EQUATIONS AND CALCULATION OF 3D STRESSED-STREINED STATE OF A CYLINDER

V. Revenko

Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of N.A.S.U.
Naukova 3-b, Lviv, 79053, e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua

The Lame equation is integrated for 3D elasticity theory (in the Cartesian coordinate system). It is proved that exist only three independent harmonic functions. The displacement vector is expressed in a cylindrical coordinate system. Three sets of eigen functions satisfying the zero boundary conditions in stresses on the end walls are constructed. The perturbed 3D stressed-streined state of a cylinder loaded on the lateral side is found.

Key words: 3D elasticity theory, Lame equation, stressed-strained state (SSS), cylinder SSS, perturbed SSS.

Стаття надійшла до редколегії 02.03.2005
Прийнята до друку 14.09.2005