ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. та інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2005. Вип. 10. С. 71–77 *2005. No 10. P. 71–77*

УДК 519.876.5:517.958:532

ПРО ВИБІР СТАБІЛІЗАЦІЙНОГО МНОЖНИКА У ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ РУХУ МІЛКОЇ ВОДИ

П. Венгерський, В. Трушевський

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

Один із найважливіших процесів гідрологічного циклу стосується потоків мілкої води, до яких належать дощовий та русловий стоки, стік рідини з поверхні водозбору, рух води в океані, тощо. Для чисельного моделювання цих потоків на практиці часто використовують проекційно-сіткову схему методу скінченних елементів. У разі великих значень чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їхні градієнти різко змінюються, в результаті чого розв'язок втрачає свою стійкість та з'являються "паразитичні" осциляції. В даній роботі було розглянуто питання стабілізації числового розв'язку методу скінченних елементів для задач стоку мілкої води. Побудовано стабілізаційну схему для варіаційної задачі рівнянь Нав'є–Стокса на основі функцій–бульбашок та зроблено верхню оцінку стабілізаційного множника, яка ґрунтується на теоретичних висновках.

Ключові слова: метод скінченних елементів, осциляції, стабілізаційний множник, стабілізаційна схема, функції-бульбашки, потоки мілкої води.

1. ВСТУП

У випадку застосування методу скінченних елементів (МСЕ) до розв'язування задач мілкої води виникла проблема – з'явилися "паразитичні" осциляції у розв'язку задачі в разі великих значень чисел Рейнольдса. У літературі використовують різні способи для того, щоб уникнути цієї проблеми. Наприклад, автори [5, 16], використовуючи квадратичні апроксимації на трикутних елементах, задавали надмірні сили тертя рідини з донною поверхнею. У працях [14, 15] автори вибирали змішані апроксимації на трикутних елементах: лінійні апроксимації для глибини стоку та квадратичні апроксимації для швидкості, задаючи надмірну в'язкість в рівняннях руху. Ці підходи суттєво погіршували відповідність обчислювальних результатів реальним процесам.

Декілька років пізніше [13] висунуто гіпотезу, що осциляції виникають через неадекватний вибір сітки в місцях великих значень градієнтів швидкості. Річ у тому, що в разі великих значень чисел Рейнольдса (Re>100) розв'язки задачі можуть мати внутрішні та примежові шари – дуже вузькі області, де швидкості та їхні градієнти різко змінюються. Внаслідок цього числові результати, побудовані за схемою Гальоркіна, де параметр дискретизації занадто великий, щоб урахувати всі ці шари, можуть сильно осцилювати у всій області визначення. В працях [3, 8–12] запропоновано різні способи вибору задовільної апроксимації. У багатьох випадках такі підходи приводять до величезної кількості ступенів вільності і, отже, до неможливості ефективного відшукання числового розв'язку.

Для усунення цієї проблеми багато авторів побудувало різні стабілізаційні схеми МСЕ [2, 4, 14, 15]. Найбільшого поширення набули стабілізаційна схема

Петрова–Гальоркіна та підхід, що ґрунтується на понятті функцій-бульбашок. Розглянемо другий з них.

Нехай варіаційна задача стоку мілкої води має вигляд

$$\begin{cases} \text{Знайти} \quad u \in W, \\ a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \tag{1}$$

де $a(u,v)$ – вихідна білінійна форма; $W \subset V = H_0^1(\Omega)$ – заданий скінченноелементний простір.

Процедура побудови стабілізаційної схеми детально наведена в праці [2]. Ефект стабілізації може бути досягнутий унаслідок розширення простору апроксимацій. Для кожного скінченного елемента T визначають простір функцій-бульбашок $B = \left\{\forall b \in B : b\big|_T \in H_0^1(T)\right\}$. Якщо $W \cap B = \{0\}$, тоді кожен елемент v простору $H := W \oplus B$ визначений однозначно у вигляді $v = v_w + v_B$, де $v_w \in W$ та $v_B \in B$. Далі замість (1) розглядають задачу

$$\begin{cases} \text{Знайти} \quad u_H = u_w + u_B, u_H \in H, \\ a(u_H, v) = (f,v) \quad \forall v \in H. \end{cases} \tag{2}$$

З (2) на одному скінченному елементі вилучають функції з простору бульбашок B, у результаті чого отримують

$$\begin{cases} \text{Знайти} \quad u \in W, \\ a(u,v) - \sum\limits_T \mu(T)\left(Au - f, A^* v\right)_T = (f,v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \tag{3}$$

де A^* – спряжений до A оператор.

Важливою для побудови стабілізаційної схеми є оцінка стабілізаційного множника $\mu(T)$ в (3). У літературі [4] існує верхня оцінка стабілізаційного множника для лінеаризованих рівнянь Нав'є–Стокса, яку вибирають з практичних міркувань

$$\mu(T) = \frac{h_T}{a\|u(x)\|} \gamma(\mathbf{Re}), \tag{4}$$

де a – деяка стала; h_T – діаметр скінченного елемента; Re – число Рейнольдса; $\gamma(z) = \begin{cases} z, \ 0 \le z \le 1, \\ 1, \ 1 \le z < \infty. \end{cases}$

Ми теоретично оцінимо стабілізаційний множник для рівнянь Нав'є–Стокса, користуючись алгоритмом, запропонованим у роботі [2], який застосовано для рівнянь адвекції–дифузії.

2. ПОБУДОВА СТАБІЛІЗАЦІЙНОЇ СХЕМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА

На підставі методики з [2] оцінимо стабілізаційний множник для рівнянь Нав'є–Стокса, які записують у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - k\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times [0,T], \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \\ u\big|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

де u – невідома швидкість рідини; p – гідростатичний тиск (уважають відомим); ρ – густина рідини; k – коефіцієнт в'язкості; f – масові сили.

Побудуємо для задачі (5) варіаційну постановку

$$\begin{cases} \text{Знайти } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ таку, що} \\ a(u,\varphi) = (f,\varphi)\ \forall \varphi \in V, \\ (u(0) - u_0, \varphi) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $a(u,\varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right) + (w \cdot \nabla u, \varphi) - k(\Delta u, \varphi)$, w – відома швидкість з попереднього кроку; $(f,\varphi) = -\frac{1}{\rho}(\nabla p, \varphi) + (f,\varphi)$.

Застосуємо методику попереднього пункту для побудови стабілізаційної схеми задачі (6). Розглянемо варіаційну задачу (6) у підпросторі $H \subset V$, який складається зі стандартного скінченноелементного підпростору $W \subset V$ та скінченноелементного простору B бульбашок, такого що $\forall \varphi \in H\ \exists! \varphi_w \in W$, $\varphi_B \in B$ $\varphi = \varphi_B + \varphi_w$. Тоді варіаційна задача зведеться до відшукання $u = u_B + u_w \in H$ і набуде вигляду

$$a(u_H, \varphi) = (f,\varphi)\ \forall \varphi \in H. \tag{7}$$

Приймемо в (7) $\varphi = \varphi_B$, отримаємо

$$a(u_B, \varphi_B) = (f, \varphi_B) - a(u_w, \varphi_B) = \left(f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w\right), \varphi_B\right). \tag{8}$$

Рівняння (8) є варіаційною задачею в просторі функцій-бульбашок B, яка має єдиний розв'язок

$$u_B = S_B\left(P_B\left(f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w\right)\right)\right), \tag{9}$$

де $P_B = L^2$ – проекція на простір B; S_B – оператор, який "розв'язує" (8).

Приймемо в (7) $\varphi = \varphi_w$ та використаємо вираз (9):

$$a(u_w, \varphi_w) = (f, \varphi_w) - a(u_B, \varphi_w) = (f, \varphi_w) - \left(u_B, -\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} - w\nabla\varphi_w + k\Delta\varphi_w\right) =$$

$$= (f, \varphi_w) - \left(S_B P_B\left(f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w\right)\right), -\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} - w\nabla\varphi_w + k\Delta\varphi_w\right). \tag{10}$$

Отже, (10) є варіаційною задачею в просторі W зі збурювальним доданком. Цей доданок ґрунтується на залишку (нев'язці рівняння), тобто якщо точний розв'язок є достатньо гладкий, щоб задовольнити рівняння Нав'є–Стокса $\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u - k\Delta u = f$, то додатковий член не вносить похибки.

Якщо віртуальний простір функцій бульбашок такий, що $S_B P_B = \mu I$, то (10) можна переписати у вигляді

$$a(u_w, \varphi_w) + \sum_T \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w, \mu\left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta\varphi_w \right)\right) =$$

$$= (f, \varphi_w) + \sum_T \left(f, \mu\left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta\varphi_w \right)\right). \tag{11}$$

3. ОЦІНКА СТАБІЛІЗАЦІЙНОГО МНОЖНИКА

Для оцінки множника μ в (11) скористаємось такою теоремою [2, с.123].

Теорема. *Нехай Z – скінченновимірний підпростір з $L^2(T)$; $a(u,v)$ – білінійна неперервна форма на $H_0^1(T)$ така, що $a(u,u) \geq \alpha\|u\|_1^2$, $\forall u \in H_0^1(T)$, $\alpha = const > 0$; для кожного $z \in Z$ визначимо $u=S_B P_B z$ як єдиний розв'язок рівняння $a(u,\varphi)=(z,\varphi)$ $\forall \varphi \in B$, $u \in B$, тоді $\exists \mu_0 = const>0$ така, що $\forall \mu$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, існує простір функцій бульбашок B такий, що $S_B P_B = \mu I$.*

Нижню границю μ_0 можна обчислити таким способом.

1. *Візьмемо підпростір $B_0 \subset H_0^1(T)$ з двома властивостями*: 1) $\forall z \in Z$ *з умови* $(u,z)=0$ $\forall u \in B_0$ *випливає, що* $z=0$; 2) $a(u,v)=a(v,u)$ $\forall u,v \in B_0$.
2. *Уведемо ортонормований базис $\{z_i\}_{i=1}^N$ в Z і обчислимо $\{s_i\}_{i=1}^N$ в B_0 так* $a(s_i,\varphi)=(z_i,\varphi)$ $\forall \varphi \in B_0$ $i=1,\ldots,N$ *(це означає, що $s_i=S_B P_B z_i$).*
3. *Приймемо $S_{ij}=a(s_i,s_j)$ $i, j=1,\ldots,N$ і обчислимо μ_0 як найменше власне значення S.*

Використаємо наведену процедуру для побудови оцінки параметра μ. Нехай простір W складається з кусково-визначених лінійних неперервних функцій, $Z \subset L^2(T)$ – скінченновимірний підпростір, $dim\ Z=1$ і ортонормований базис заданий таким виразом: $z_1 = \frac{1}{\Delta^{1/2}}$; Δ – площа трикутника T. B_0 – це одновимірний простір породжений кубічним баблом $b_3^T(x) = L_1 L_2 L_3$, де L_i – кусково-лінійні функції на трикутнику T (i=1, 2, 3). Вважаємо, що залежності від часу немає, тоді згідно з пунктом 2 теореми отримаємо

$$\int_T (\nabla s_1 \cdot w) b_3 dx + k \int_T \nabla s_1 \cdot \nabla b_3 dx = \int_T \frac{1}{\Delta^{1/2}} b_3 dx. \tag{12}$$

Приймемо в (12) $s_1 = \hat{s}_1 b_3$ ($\hat{s}_1$ – константа) та розпишемо кожен з інтегралів попереднього виразу.

Інтеграл з в'язкими доданками набуде вигляду

$$\int_T \nabla s_1 \cdot \nabla b_3 dx = \hat{s}_1 \int_T \nabla b_3^2 dx = \hat{s}_1 \int_T (\nabla L_1 L_2 L_3)^2 dx = \frac{d^2}{720\Delta} \hat{s}_1, d^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2, \tag{13}$$

де l_i – довжина сторони трикутника T (i=1, 2, 3);

$$\int_T (\nabla s_1 \cdot w) b_3 dx = s_1 \int_T (\nabla b_3 \cdot w) b_3 dx = \frac{1}{2} \hat{s}_1 \int_T w \cdot \nabla b_3^2 dx = -\frac{1}{2} \hat{s}_1 div\ w \int_T b_3^2 dx = -\frac{\hat{s}_1 e \Delta}{7!}, \tag{14}$$

де $e = div\ w$.

Права частина рівняння (12) матиме вигляд

$$\int_T \frac{1}{\Delta^{1/2}} b_3 dx = \frac{1}{\Delta^{1/2}} \frac{\Delta}{60} = \frac{\Delta^{1/2}}{60}. \tag{15}$$

З використанням значення інтегралів (13)–(15) рівняння (12) запишемо так:

$$\frac{\tilde{s}_1}{720}\left(\frac{kd^2}{\Delta} - \frac{e\Delta}{7}\right) = \frac{\Delta^{1/2}}{60}.$$

З попереднього виразу отримаємо

$$\tilde{s}_1 = \frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2 - \Delta^2 e}. \tag{16}$$

Скористаємось третім пунктом теореми для знаходження оцінки. Оскільки простір B_0 одновимірний, то найменшим власним значенням матриці S буде елемент $S_{11}=a(s_1,s_1)$. Використаємо (16) і обчислимо це значення:

$$S_{11} = \int_T (w \cdot \nabla s_1) s_1 dx + k\int_T (\nabla s_1)^2 dx = \tilde{s}_1^2 \int_T (w \cdot \nabla b_3) b_3 dx + k\tilde{s}_1^2 \int_T (\nabla b_3)^2 dx =$$

$$= \tilde{s}_1^2\left(-\frac{1}{2} e\int_T b_3^2 dx + k\int_T (\nabla b_3)^2 dx\right) = \tilde{s}_1^2\left(-\frac{\Delta e}{7!} + k\frac{d^2}{720\Delta}\right) = \left(\frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2 - \Delta^2 e}\right)^2 \left(\frac{7kd^2 - \Delta^2 e}{7!\,\Delta}\right) =$$

$$= \frac{7}{5}\left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2 - e}\right).$$

Отримаємо таку верхню оцінку параметра μ:

$$\mu_0 = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2 - e}\right). \tag{17}$$

Наведена процедура знаходження оцінки не буде найкращим можливим вибором μ_0 (за винятком дуже вдалого вибору B_0), однак дає оцінку, якої може бути достатньо для застосувань. Оцінку (17) можна використовувати для множника M_e у стабілізаційній схемі рівнянь мілкої води [1].

4. ВИСНОВКИ

Отже, отримано верхню оцінку стабілізаційного множника, яку можна застосовувати до моделей, рівняння яких походять з рівнянь Нав'є–Стокса. Однак безпосереднє використання такої оцінки не завжди дає задовільний результат. Тому в багатьох задачах вигідно скористатись наведеною вище процедурою для побудови точнішої верхньої межі параметра μ. Цю методику обчислення оцінки стабілізаційного множника застосовували автори для задач стоку мілкої води [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. *Венгерський П.С.*, *Трушевський В.М.*, *Шинкаренко Г.А.* Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку мілкої води // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика 2002. № 4. С.102-109.
2. *Baiochi C.*, *Brezzi F.*, *Franca L.P.* Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1993. N 105. P.125-141.
3. *Barrenechea G.R.*, *Valentin F.* An unusual stabilized finite element method for a generalized Stokes problem // Numer. Math. 2001. N 7. P. 1-25.

4. *Behr M.A.*, *Franca L.P.*, *Tezduyar T.E.* Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-Stress Formulation of Incompressible Flows // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1993. N 104. P. 31-48.
5. *Brebbia C.A.*, *Partridge P.W.* Finite element models for circulation studies. In Mathematical Models for Environmental Problems: Proceedings of the international conference held at the University of Southampton. New York: Wiley, 1976. 537p.
6. *Brezzi F.*, *Fortin M.* A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods // Numer. Math. 2001. N 89. P. 457-491.
7. *Brezzi F.*, *Franca L.P.*, *Hughes T.J.R.*, *Russo A.* $b = \int g$ // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1997. N 145. P. 329-339.
8. *Codina R.*, *Blasco J.* Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations // Numer. Math. 2000. N 87. P.59-81.
9. *Constantin A.* On the Blow-Up of Solutions of a Periodic Shallow Water Equation // J. Nonlinear Sci. 2000. N 10. P. 391-399.
10. *Fursikov A.V.* Stabilizability of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control // J. math. fluid mech. 2001. N 3. P. 259-301.
11. *Gavrilyuk V.M.*, *Teshukov V.M.* Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Continuum Mech. Thermodyn. 2000. N 13. P. 365-382.
12. *Gerbeau J.-F.* A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations // Numer. Math. 2000. N 87. P. 83-111.
13. *Gresho P.M.*, *Lee R.L.* Don't suppress the wiggles – they're telling you something // Computers and Fluids. 1981. N 9. P. 223-253.
14. *King I.P.*, *Norton W.R.* Recent applications of ram's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality // Finite Elements in Water Resources, Computational Methods in Water Resources XI. London: Pentech Press, 1978. P. 2.81-2.99.
15. *King I.P.*, *Norton W.R.*, *Iceman W.R.* A finite element solution for two- dimensional strained flow problems. // Finite elements in fluids, volume 1 of Viscousows and hydrodynamics. London: Wiley, 1975. P. 133-156.
16. *Partridge P.W.*, *Brebbia C.A.* Quadratic finite elements in shallow water problems // ASCE J. Hydr. Eng. 1976. N 102. P. 1299-1313.

ABOUT SELECTION OF STABILIZATION FACTOR IN VARIATIONAL PROBLEMS OF SHALLOW WATER FLOW

P. Vengersky, V. Trushevsky

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

In practice for numerical simulation of shallow water flows frequently use the projective-grid scheme of a finite element method (FEM). Flows and their gradients change sharply at the large values of a Reynold's number. The solution loses the stability and there are oscillations. For improvement of outcome is offered a stabilizing scheme of a finite element method. The scheme is grounded on bubble-functions. Stabilization addend is contained by with a factor from which the adequacy of result depends. In the literature the estimation of a stabilization factor is considered from the practical point of view, which is not grounded theoretically.

The given article is dedicated to selection of a factor of the stabilization scheme FEM. The upper-bound estimate of a stabilization factor is grounded on theoretical conclusion. In this work the problem about stabilization of the numeric solution FEM for shallow water tasks at large value of a Reynold's number is consider. The stabilization scheme of a variational problem of Navier-Stokes equations is built. This scheme is grounded on bubble-functions. The upper-bound estimate of a stabilization factor is made. The received estimation can be used to selection of a stabilization factor on each finite element in shallow water flow problems.

Key words: finite element method, oscillations, stabilization factor, stabilization scheme, bubble-functions, shallow water flow.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.2005
Прийнята до друку 14.09.2005