

УДК 539.3:519.6

## ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН НА ДЕФОРМІВНІЙ ОСНОВІ

О. Кравченко

*Інститут соціального управління, економіки та права, м. Черкаси*

Розглянуто армовану криволінійними ребрами пластинку, що лежить на деформівній основі. На поверхні контакту матеріалів виникає область міжфазової взаємодії компонентів. Виконано апроксимацію рівнянь рівноваги та неперервності деформацій для нелінійної крайової задачі. Проаналізовано питання коректності формулювання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в соболевських просторах  $W_{m+1}^4(S)$ .

*Ключові слова:* пластинка, армована криволінійними ребрами; область міжфазової взаємодії компонентів; дискретизація, коректність формулювання крайової задачі, соболевські простори  $W_{m+1}^4(S)$ .

### 1. ВСТУП

Розглянемо композитну систему [7]: армовану ребрами пластинку, розміщену на деформівній основі [4]. Запропонуємо варіаційне формулювання задачі, яке враховує напружено-деформівний стан армованої пластинки та деформівної основи. Виконаємо дискретизацію адекватної задачі функціонала [5]. Таку неоднорідну еліптичну крайову задачу дослідимо проекційно-різницевиими методами. Без врахування неоднорідності композитних структур нелінійну крайову задачу досить детально досліджено варіаційними методами [6]. У цьому разі враховано реальні умови експлуатації пластинчастих елементів конструкцій. До таких реальних умов належать різноманітні фактори напружено-деформівного стану, тобто характеристики самої пластинки, деформівної основи та силові функції навантаження. Всі ці складові зовнішніх та внутрішніх зусиль, як звичайно, мають зовсім незначний ступінь гладкості. Тому розв'язування такої задачі не можна розглядати у звичайному класичному розумінні. Цілком природно аналізувати допустимі узагальнені розв'язки [9]. У цитованому вище дослідженні вивчено питання коректності формулювань фізично нелінійних задач у соболевських просторах  $W_m^l(S)$ . Зазначимо, що в разі відшукання наближеного розв'язку задачі в даній роботі додатково враховано також неоднорідна область міжфазової взаємодії компонентів на межі контакту матеріалу пластинки та армувальних ребер.

У теорії крайових задач одним із важливих питань є питання про узагальнений розв'язок та коректність формулювання такої задачі в функціональних просторах. Врахування неоднорідності матеріалу композитної системи та вищезгаданих ускладнюючих факторів потребує розгляду розв'язку в соболевському просторі  $W_{m+1}^2$ .

### 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Уведемо прямокутну праву систему координат  $x_1, x_2, x_3$ . Будемо вважати, що

серединна поверхня пластини збігається з площиною  $0x_1 x_2$  і займає деяку скінченну багатозв'язну область  $S$  з границею  $L$ . Контур  $L$  складається з кусково-гладких замкнутих кривих  $L_j (j=1, 2, 3, \dots, m+1)$  у цьому разі  $L_{m+1}$  охоплює всі останні контури  $L = \sum_{j=1}^{m+1} L_j$ .

Пластинка посилена криволінійними ребрами, осьові лінії яких позначатимемо через  $\Gamma_i (i=1, 2, 3, \dots, k)$ ,  $\Gamma = \sum_{i=1}^k \Gamma_i$ . Будемо вважати, що лінії  $\Gamma$  розбивають область  $S$  на  $k+1$  областей так, що  $S = \sum_{i=1}^{k+1} S_i$  і області  $S_\eta (\eta=1, 2, \dots, \lambda)$  – однозв'язні, а області  $S_\xi (\xi = \lambda+1, \dots, k+1)$  – багатозв'язні й обмежені сукупністю кривих  $L$  і  $\Gamma$ . Між матеріалом пластинки та армувальними ребрами, з урахуванням технологічних особливостей утворення композита, існуватиме деяка область міжфазової взаємодії компонентів, що контактують. Наявність такої зони суттєво впливатиме на розв'язок задачі, яку розглядаємо.

Для отримання загальних умов спряження пластинки і ребер приймемо, що ребра з'єднані шарнірно з коефіцієнтами жорсткості шарнірів  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, k)$ . Відповідно врахуємо деформації податливих опор під шарнірами з'єднання з коефіцієнтами жорсткості  $\beta_i (i=1, 2, \dots, k)$ .

Узагальнені граничні умови отримуємо з того, що по краю  $L$  пластинка має ребра, під якими знаходяться податливі опори з жорсткостями, відповідно,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Вводячи різноманітні значення жорсткостей  $\alpha$ ,  $\beta$  і ребер дає змогу враховувати повний спектр крайових умов.

На пластинку діє нормальне до середньої площини навантаження  $q(x_1, x_2)$ , а уздовж контуру  $L$  – розподілені моменти згину  $M_n^0$ , кручення  $M_t^0$  та розподілені нормальна  $T_n^0$ , дотична  $T_t^0$  і поперечна  $Q_n^0$  сили. На ребра також можуть діяти розподілені моменти  $m_{ni}^0$  і вертикальні сили  $p_{ni}^0$ .

Уведемо головні співвідношення для пластинки. Матеріал пластинки неоднорідний та анізотропний [3]; її товщина незмінна. Для неї справджуються статичні та геометричні гіпотези Кірхгофа; Відносні видовження, кути поворотів і зсуви малі порівняно з одиницею; квадрати кутів поворотів з відносними деформаціями мають один порядок. Для пластинки є правильною теорія малих пружно-пластичних деформацій анізотропних середовищ [5].

Деформівна основа має фізичні параметри  $k_1, k_2$ , які є функціями координат  $x_1, x_2$ . Внутрішні зусилля в основі, що виникають під час її деформування характеризують роботу основи на зсув та при деформації стиснення.

Запишемо принцип можливих зсувів у вигляді

$$\delta W = -\delta V + \delta U_0 + \delta U_p + \delta U_u + \delta U_c + \delta U_m = 0, \quad (1)$$

де  $\delta V$  – варіація роботи зовнішніх сил;  $\delta U_0$  – варіація потенціальної енергії деформівної основи;  $\delta U_p$  – варіація потенціальної енергії криволінійних ребер;  $\delta U_u$  – варіація потенціальної енергії згину пластинки;  $\delta U_c$  – варіація потенціальної енергії диформації серединної площини пластинки;  $\delta U_m$  – варіація енергії шарнірів.

Виконаємо перетворення основного варіаційного рівняння та інтегрування частинами, отримаємо диференціальне рівняння рівноваги та сумісності деформацій. До цих рівнянь треба додати умови спряження на армувальних ребрах, а також крайові умови для прогинів та умови погодженості в кутових точках.

Неоднорідність будемо характеризувати умовами пластичності та анізотропії. Рівняння, що зв'язують компоненти тензорів напружень і деформацій для анізотропних середовищ у разі невеликих пружно-пластичних деформацій мають вигляд

$$e_{ik} = \begin{cases} a_{iklm}\sigma_{lm} & \frac{f}{f_s} \leq 1, \\ a_{iklm}\sigma_{lm} + q_{iklm}\sigma_{lm}\psi(f), & \frac{f}{f_s} > 1. \end{cases} \quad (2)$$

де  $a_{iklm}$  – пружні сталі пластинки,  $q_{iklm}$  – сталі, що враховують анізотропію,  $\sigma_{lm}$  – напруження в пластинці. Функція  $\psi(f)$  характеризує закон зміцнення анізотропного матеріалу та визначена за формулою

$$\psi(f) = \frac{a \cdot n}{2n-1} \left[ \left( \frac{f}{f_s} \right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f}{f_s}} \right], \quad (3)$$

де  $a$ ,  $n$ ,  $f_s$  – сталі, визначені експериментально; функція  $f$  визначена за формулою

$$f = \frac{1}{2} q_{nplm} \sigma_{np} \sigma_{lm}. \quad (4)$$

### 3. ЗНАХОДЖЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для розв'язування нелінійної крайової задачі будемо різницеву схему методом апроксимації функціонала. Виконаємо розбиття серединної площини  $S$  прямокутною сіткою  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2$  з кроком  $\lambda_{1_i}$  ( $i = \overline{1, N}$ ) у напрямі осі  $0x_1$  і з кроком  $\lambda_{2_j}$  ( $j = \overline{1, N}$ ) у напрямі осі  $0x_2$ . Множину внутрішніх вузлів сітки позначимо  $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ , а множину граничних вузлів і вузлів, на яких лежать осі ребер, – через  $\tau = \bar{\tau} \setminus \tau$ . Окрім головної сітки, на область серединної площини пластинки накладемо допоміжну сітку, яка в два рази дрібніша від головної і розбиває область на комірки за певною схемою (див. рис. 1).

Інтегрування по площі замінимо підсумовуванням за комірками, а диференціювання замінимо різницевою апроксимацією також за комірками відповідно до наведених нижче формул:

$$\begin{aligned}
 w_{x_1}^- &= \frac{1}{\lambda_{i-1}} (w_{i,j} - w_{i-1,j}) && \text{для комірок 1,4;} \\
 w_{x_1} &= \frac{1}{\lambda_i} (w_{i+1,j} - w_{i,j}) && \text{для комірок 1,3;} \\
 w_{x_2}^- &= \frac{1}{\lambda_{2j-1}} (w_{i,j} - w_{i,j-1}) && \text{для комірок 3,4;} \\
 w_{x_2} &= \frac{1}{\lambda_{2j}} (w_{i,j+1} - w_{i,j}) && \text{для комірок 1,2;} \\
 w_{x_1 x_2} &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_{2j}} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} + w_{i,j}) && \text{для комірок 1;} \\
 w_{x_1 x_2}^- &= \frac{1}{\lambda_{i-1} \lambda_{2j}} (w_{i,j+1} - w_{i,j} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j}) && \text{для комірок 2;} \\
 w_{x_1 x_2} &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_{2j-1}} (w_{i+1,j} - w_{i+1,j-1} - w_{i,j} + w_{i,j-1}) && \text{для комірок 3;} \\
 w_{x_1 x_2}^- &= \frac{1}{\lambda_{i-1} \lambda_{2j-1}} (w_{i,j} - w_{i,j-1} - w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}) && \text{для комірок 4;} \\
 w_{x_1 x_1}^- &= \frac{\lambda_{i-1} + \lambda_i}{2\lambda_{i-1}\lambda_i} \left( \frac{1}{\lambda_i} w_{i+1,j} - \frac{\lambda_{i-1} + \lambda_i}{\lambda_{i-1}\lambda_i} w_{i,j} + \frac{1}{\lambda_{i-1}} w_{i-1,j} \right) && \text{для комірок 1,2,3,4;} \\
 w_{x_2 x_2}^- &= \frac{\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j}}{2\lambda_{2j-1}\lambda_{2j}} \left( \frac{1}{\lambda_{2j}} w_{i,j+1} - \frac{\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j}}{\lambda_{2j-1}\lambda_{2j}} w_{i,j} + \frac{1}{\lambda_{2j-1}} w_{i,j-1} \right) && \text{для комірок 1,2,3,4;} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Аналогічно можна записати формули апроксимації похідних для функції напружень  $\Phi$ . Для дискретизації головне варіаційне рівняння запишемо за допомогою формул типу (5). Фізичні параметри пластинки, ребер та основи з урахуванням міжфазового прошарку, будемо визначати на  $n$ -му наближенні з  $(n-1)$ -го наближення. Це дає змогу знак варіації  $\delta$  винести за знак інтеграла і на кожному етапі наближення отримувати кубічну систему алгебричних рівнянь.

Виконаємо апроксимацію рівнянь рівноваги та неперервності деформацій. Для цього проведемо апроксимацію тільки по внутрішнім вузлам  $\tau$  області  $S$ , вважаючи, що на контурі  $L$  функції прогину  $w$  і напруги  $\Phi$  та їхні другі похідні рівні нулю, а ребер нема. З рис. 1 та формул (5) видно, що в кожній з чотирьох комірок навколо вузла  $ij$  будуть різними апроксимації перших та мішаних других похідних. Якщо сітка нерівномірна в напрямі осей  $0x_1, 0x_2$ , то в разі апроксимації значення інтегралів у головному варіаційному рівнянні для комірок відрізнятимуться від їхніх площ, тобто  $\lambda_i \lambda_{2j}$  залежатимуть від  $ij$ . Тому апроксимацію функціонала крайової задачі будемо виконувати для кожної комірки навколо вузла  $ij$  окремо. Позначимо через  $\tau_1^+ \times \tau_2^+$  першу комірку,  ${}^+ \tau_1 \times \tau_2^+$  – другу,  $\tau_1^+ \times \tau_2^-$  – третю,  ${}^+ \tau_1 \times \tau_2^-$  – четверту, а

через  $\sum_{\tau_1^+ \times \tau_2^+}$  – підсумовування за першими комірками всіх внутрішніх вузлів області  $S$ ,  $\sum_{\tau_1^- \times \tau_2^-}$  – за другими тощо.

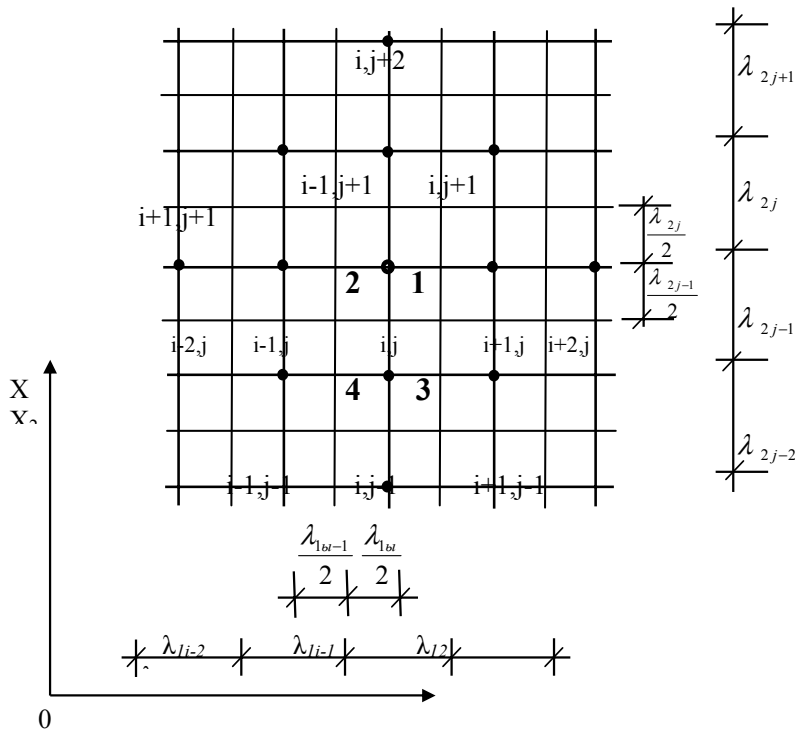


Рис. 1. Схема розбиття області на комірки

Замінімо інтегрування підсумовуванням за комірками, а диференціювання – різницевою апроксимацією відповідно до наведених формул (5), тоді для перших комірок усіх внутрішніх  $\tau$  області  $S$  головного варіаційного рівняння задачі знайдемо

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau_1^+ \times \tau_2^+} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (D_{11} - D_{11}^0) (w_{x_1 x_1}^-)^2 + (D_{22} - D_{22}^0) (w_{x_2 x_2}^-)^2 + 2(D_{12} - D_{12}^0) (w_{x_1 x_1}^- w_{x_2 x_2}^-) + \right. \right. \\
 & + 4(D_{16} - D_{16}^0) (w_{x_1 x_1}^- w_{x_2 x_2}^-) + 4(D_{26} - D_{26}^0) (w_{x_2 x_2}^- w_{x_1 x_1}^-) + 4(D_{66} - D_{66}^0) (w_{x_1 x_2}^-)^2 \left. \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \left[ A_{11} (\Phi_{x_2 x_2}^-)^2 + A_{22} (\Phi_{x_1 x_1}^-)^2 + 2A_{12} (\Phi_{x_1 x_1}^- \Phi_{x_2 x_2}^-) - \right. \\
 & - 2A_{16} (\Phi_{x_2 x_2}^- \Phi_{x_1 x_2}^-) - 2A_{26} (\Phi_{x_1 x_1}^- \Phi_{x_1 x_2}^-) + 2A_{66} (\Phi_{x_1 x_2}^-)^2 \left. \right] - \\
 & - \left[ d_{21} (w_{x_1}^- \Phi_{x_1 x_1}^-) + d_{12} (w_{x_2}^- \Phi_{x_2 x_2}^-) + d_{11} (w_{x_1}^- \Phi_{x_2 x_2}^-) + d_{22} (w_{x_2}^- \Phi_{x_1 x_1}^-) - \right.
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & -d_{61}(w_{x_1}^- \Phi_{x_1 x_2}^-) - d_{62}(w_{x_2 x_2}^- \Phi_{x_1 x_2}^-) + 2d_{26}(w_{x_1 x_2}^- \Phi_{x_1}^-) + 2d_{16}(w_{x_1 x_2}^- \Phi_{x_2 x_2}^-) - 2d_{66}(w_{x_1 x_2}^- \Phi_{x_1 x_2}^-) \Big] - \\
 & \left[ M_{1T} w_{x_1 x_1}^- + M_{2T} w_{x_2 x_2}^- + 2M_{12T} w_{x_1 x_2}^- + \varepsilon_{1T} \Phi_{x_2 x_2}^- + \varepsilon_{2T} \Phi_{x_1 x_1}^- - \varepsilon_{12T} \Phi_{x_1 x_2}^- \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \left[ \left( \Phi_{x_2 x_2}^- w_{2, x_1, x_1}^- + \Phi_{x_1 x_1}^- w_{2, x_2, x_2}^- - 2\Phi_{x_1 x_2}^- w_{2, x_1, x_2}^- \right) w \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ k_2 (w_{x_1}^-)^2 + k_2 (w_{x_2}^-)^2 + k_1 (w^-)^2 \right] - qw \Big\} \frac{\lambda_{1i} \lambda_{2j}}{4}
 \end{aligned}$$

Складові останньої суми обчислимо за формулами

$$\begin{aligned}
 C_{mp} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{mp} dx, & K_{mp} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{mp} x dx, & D_{mp} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{mp} x^2 dx & (7) \\
 A_{11} &= \frac{C_{22} C_{66} - C_{26}^2}{G}, & A_{22} &= \frac{C_{11} C_{66} - C_{16}^2}{G}, & A_{11} &= \frac{C_{22} C_{66} - C_{26}^2}{G}, & A_{12} &= \frac{C_{16} C_{26} - C_{12} C_{66}}{G} \\
 & & & & A_{16} &= \frac{C_{12} C_{26} - C_{16} C_{22}}{G}, & A_{26} &= \frac{C_{12} C_{16} - C_{26} C_{11}}{G}, & (8)
 \end{aligned}$$

де

$$G = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66} + 2C_{12} C_{16} C_{26} - C_{11} C_{26}^2 - C_{22} C_{16}^2. \quad (9)$$

Коефіцієнти  $B_{mp}$  обчислимо аналогічно  $A_{mp}$  заміною  $C_{mp}$  на  $a_{ij}$ . Під  $a_{ij}$  розуміємо функції об'ємної та інтенсивної деформації, що залежать від значень координат правої прямокутної системи. Користуючись формулами для анізотропного тіла [2] знайдемо значення  $d_{mn}$  (через  $A_{mp}$  та  $K_{mp}$ ) і  $\varepsilon_{mn}$  (з урахуванням значення початкового та силового прогинів).

Для другої комірки підсумовування необхідно виконувати за  $^+ \tau_1 \times \tau_2^+$ , мішані другі похідні апроксимувати по  $\Phi_{x_1 x_2}^-$ ,  $w_{x_1 x_2}^-$  з формул (5), а перші похідні – по  $w_{x_1}^-$ ,  $w_{x_2}^-$ , замість множника  $\frac{\lambda_{1i} \lambda_{2j}}{4}$  треба поставити  $\frac{\lambda_{1i-1} \lambda_{2j}}{4}$ . Аналогічно отримаємо вирази для третьої та четвертої комірок. Отримані чотири типи виразів прирівняємо до нуля. Знайдена апроксимація функціонала є функцією двох змінних  $w(x_{ij})$  та  $\Phi(x_{ij})$ . Обчислимо її перші похідні по кожній змінній у внутрішніх вузлах сітки, прирівняємо їх до нуля. Тоді отримаємо апроксимацію диференціальних рівнянь рівноваги та сумісності деформації пластинки.

Зазначимо, що вирази будуть мати різний вигляд відповідно до розміщення ребер щодо осей  $0x_1$  та  $0x_2$ , а також будуть розрізнятимуться за типами комірок поділу області  $S$ . Виконавши апроксимацію умов спряження пластинки та ребер, ми отримаємо також вирази для апроксимації функціонала.

У разі апроксимації крайових умов враховано розміщення контуру пластинки відносно осей  $0x_1$  та  $0x_2$ , а також розглянуто кутову точку, що лежить на перетині

контурних ліній паралельних до осей. Формули для граничних умов є однотипними, а їхні коефіцієнти обчислені за тими ж формулами, що і формули спряження.

#### 4. ПИТАННЯ КОРЕКТНОСТІ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В СОБОЛЄВСЬКИХ ПРОСТОРАХ.

У разі дослідження задач розрахунку пластинки в реальних умовах навантаження на пластинку, її механічні характеристики та параметри основи можуть бути не гладкими функціями. Тому доцільно розглянути допустимі узагальнені розв'язки. Для загальних припущень досліджували [6,7] формулювання нелінійних крайових задач в у соболевських просторах  $W_m^l(S)$ .

Візьмемо до уваги виконання умов обмеженості деяких коефіцієнтів нелінійної крайової задачі. Нехай  $w \in W_m^2(S)$ . Уведемо традиційне означення узагальненого розв'язку Побудуємо вираз першого диференціала Гато  $P'w\eta$  оператора крайової задачі, тут  $\eta \in W_m^2(S)$ . Можна довести симетричність оператора  $P'w\eta$ . З урахуванням нормування простору  $W_2^2(S)$  та застосуванням нерівності Коші – Буняковського можна визначити, що

$$C_1^2 \|\eta\|_2^2 \geq (P'w\eta, \eta) \geq C_2^2 \|\eta\|_2^2 \geq C_3^2 \|\eta\|_0^2. \quad (10)$$

На підставі (10) отримаємо

$$\gamma_1 (P'_w w, w) \leq \mathfrak{L}(w, w) \leq \gamma_2 (P'_w w, w), \quad (11)$$

де  $\mathfrak{L}(w, w)$  – оператор крайової задачі. З останніх двох нерівностей випливає таке:

$$\gamma_3^2 \|w\|_2^2 \leq \mathfrak{L}(w, w) = (q, w) + (f_1, w) + (f_2, w) \leq \gamma_4^2 \|w\|_2^2, \quad (12)$$

де  $f_1, f_2$  – оператори крайових умов. Наведені співвідношення доводять єдиність існування узагальненого розв'язку нелінійної крайової задачі.

Якщо коефіцієнти задачі є гладкішими функціями, то її доцільно розглянути в  $W_m^4(S)$ . Скористаємось результатами Ю. М. Березанського [1]. Це дає змогу разом з умовою рівномірної еліптичності отримати таку енергетичну нерівність

$$\gamma_6^2 \|w\|_4^2 \leq \|Pw\|_4^2 + \|f_1\|_{0,5}^2 + \|f_2\|_{1,5}^2 \leq \gamma_5^2 \|w\|_4^2. \quad (13)$$

Це свідчить про коректність формулювання крайової задачі для нашого нелінійного еліптичного рівняння в соболевських просторах  $W_m^4(S)$ .

У разі деяких припущень щодо коефіцієнтів нелінійної еліптичної задачі можна отримати наведену нижче енергетичну нерівність

$$\gamma_7^2 \|w\|_{4+l}^2 \leq \|Pw\|_{4+l}^2 + \|f_1\|_{0,5+l}^2 + \|f_2\|_{1,5+l}^2 \leq \gamma_6^2 \|w\|_{4+l}^2. \quad (14)$$

Звідси випливає коректність формулювання задачі в соболевських просторах  $W_{m+1}^4(S)$ .

#### 4. АЛГОРИТМ ЧИСЛОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Для числової реалізації пропонуємо такий алгоритм.

1). Задають початкові параметри задачі: коефіцієнти жорсткості шарнірів та опор на межі пластинки і в області між ребрами жорсткості; активне навантаження на пластинку; зусилля на межі пластинки та ті, що діють безпосередньо на ребро; коефіцієнти піддатливості основи; температурні фактори; пружні та пластичні характеристики матеріалу пластинки і ребер; зміни пружних і пластичних характеристик цих же елементів.

2). Будують різницеву апроксимацію рівнянь рівноваги та нерозривності деформацій з урахуванням крайових умов для кожного вузла сітки.

Далі алгоритм розгалужують для розв'язування лінійної та нелінійної задач.

У разі розв'язування лінійної задачі потрібно:

- а) обчислити коефіцієнти дискретизованого квадратичного функціонала (6);
- б) без урахування операторів геометричної нелінійності розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження  $\omega_i$  та  $\Phi_i$  в кожному вузлі сітки;
- в) визначити деформації та напруження в пластинці;
- г) зазначені параметри деформацій та напружень визначити остаточно в ребрах жорсткості.

Нелінійна складова алгоритму відповідає таким крокам (У цьому разі враховують такі умови нелінійності: 1)  $\sigma_{ij} \geq \sigma_s$  – фізично нелінійна задача;

2)  $k_1, k_2$  – нелінійні параметри основи; 3)  $L_S(\omega, \Phi) \neq 0$ ):

- а) обчислюють коефіцієнти пружно-пластичної задачі;
- б) виконують цикл послідовних наближень деформацій та напружень. Обчислюють вирази для (6) з урахуванням  $(n-1)$ -го наближення, а також нові значення  $k_1$  та  $k_2$ ;
- в) визначають деформації та напруження в пластинці.
- г) процес повторюють циклічно по пункту б доти, доки різниця між напруженнями в пластинці та ребрах за двома попередніми наближеннями не буде менше заданої точності.

#### 5. ПРИКЛАД ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Згідно з викладеним алгоритмом створено програмний продукт. Наведемо деякі результати, що ілюструють утворення пружно-пластичних областей та вплив підкріплених ребер.

Розглянемо вільно розташовану прямокутну пластинку, що лежить під дією навантаження, нерівномірно розподіленого в різних комбінаціях вузлів сітки. Залежно від початкових даних обчислено навантаження плинності, зі збільшенням яких визначено зони плинності по поверхні і по товщині пластинки, а також прогини, моменти згину та кручення. Виконано дослідження для квадратної пластинки розмірами  $a = b = 600$  см;  $h = 60$  см;  $\nu = 0,5$ ;  $E = 1,5 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $k_1 = 9$  кг/см<sup>3</sup>. Результати числового експерименту відтворюють характер утворення зон плинності,



зображений на рис. 2 в разі навантаження різної інтенсивності, що діє на центральний вузол сітки.

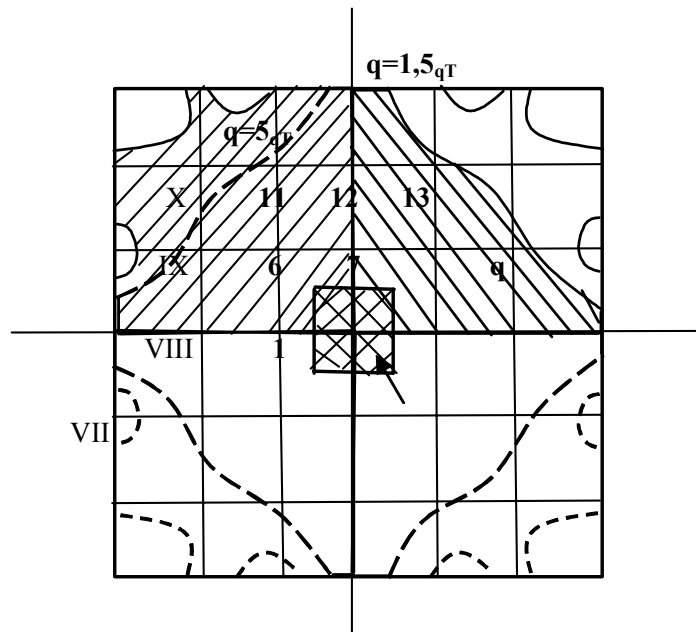


Рис. 2. Зони плинності

Розв'язки задачі за наведеним вище алгоритмом наведемо у вигляді таблиці (дані у безрозмірних величинах).

Вузли	Прогини при $1,5q_T$	Межі пластичних зон	Прогини при $5 q_T$	Межі пластичних зон
VII	-0,13370370	-	-0,25919095	-
VIII	-0,69413440	1,00000000	-0,17511223	0,34826214
I	0,010435486	1,00000000	-0,071123343	0,22747268
IX	-0,01472608	1,00000000	-0,093654632	0,67774275
6	0,089872395	0,63712766	0,040873866	0,11353094
7	0,21919050	0,33931239	0,23086059	0,073546437
X	0,02032299	0,51925272	0,0078570242	0,057141237
11	0,15225283	0,29509829	0,10787809	0,045264183
12	0,36134619	0,12871863	0,46327354	0,023386886
13	0,66722752	0,030542907	0,86956578	0,0069551666

## 6. ВИСНОВКИ

Отже, ми побудували схему апроксимації функціонала змодельованої задачі для шарнірно закріпленої пластинки армованої ребрами, що лежить на деформівній основі. За цією схемою розроблено алгоритм знаходження розв'язку дискретизованої як лінійної, так і нелінійної задачі. За цим алгоритмом обчислено прогини площини

пластинки та знайдено межі пластичних зон під дією навантаження 1,5 та 5,0 qT для квадратної пластинки (див. рис.1). Детальніший розгляд цієї задачі відтворюватиме не лише нелінійні ефекти, а також вплив міжфазових утворень. Результати таких досліджень наведемо надалі.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Березанский О. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 798 с.
2. Григоренко Я. М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – К.: Вища школа, 1985. – 190 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
4. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Гос. изд-во л-ры по строит. и арх., 1954. – 56 с.
5. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
6. Середенко В. Н. Физически нелинейные задачи расчета пластин, лежащих на деформируемом основании: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1978. – 16 с.
7. Середенко В. Н. Расчет элементов конструкций из композитов на основе моделей взаимодействия компонентов: Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. – К., 1991. – 28 с.
8. Середенко В.А., Кравченко О.В., Курченко Ю.Е. Методи обчислювальної математики отримання розв'язків крайових задач та їх оцінок на основі моделей міжфазової взаємодії в композитних матеріалах // "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Тези доп. Дев'ятої всеукр. конф., 24-26 вересня 2002 р., м. Львів. – Львів, 2002. – 117-118 с.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Издат-во СО АН СССР, 1962. – 256 с.

#### NUMERICAL INVESTIGATION OF UNILINEAR TASKS OF COMPOSITE PLASTES ON THE DEFORMED BASE THEORY

**О. Kravchenko**

*Institute of social managements, economics and law, Cherkassy*

Reinforced with curvilinear ribs plate located on a deformed base has been observed. On the material contact surface there appears component interphase interaction area. Equilibrium and deformation continuity equation approximation for unilinear boundary tasks is being held. Problems of definiteness of bringing up boundary tasks for an unilinear elliptical equation in Sobol range  $W_{m+l}^4(S)$  are being observed.

*Key words:* reinforced with curvilinear ribs plate; component interphase interaction area; discretization; boundary tasks bringing up correctness; Sobol range  $W_{m+l}^4(S)$ .

*Стаття надійшла до редколегії 24.05.2004*

*Прийнята до друку 13.10.2004*