

УДК 517.958:519.6

ВПЛИВ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ТИМОШЕНКА – МІНДЛІНА НА ПОШИРЕННЯ УДАРНОЇ ХВИЛІ В РІДКОМУ НАПОВНЮВАЧІ

І. Бернакевич

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: ibernyk@franko.lviv.ua

Побудовано математичну модель задачі акустичної взаємодії оболонки обертання з рідиною у випадку осесиметричного навантаження. За основу моделі взято лінійні співвідношення оболонок Тимошенка – Міндліна з урахуванням обтиску нормального елемента та акустичне наближення рівнянь рідини. Сформульовано початково-крайову задачу та відповідну їй варіаційну задачу взаємодії двох середовищ. Побудовано проекційно-сіткову схему, яка передбачає напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Виконано численні дослідження поведінки оболонки та рідини в разі їх сумісного коливання, спричиненого імпульсним навантаженням. Зроблено порівняння отриманих числових результатів із відповідними результатами, наведеними в [2].

Ключові слова: оболонка Тимошенка – Міндліна, початково-крайова задача, варіаційна задача, проекційно-сіткова схема, апроксимація Гальоркіна, однокрокова рекурентна схема.

1. ВСТУП

Математичне моделювання динамічних процесів акустичної взаємодії різних фізико-механічних субстанцій є актуальним з огляду на щораз більші потреби приладобудування. Складність математичних формулювань та необхідність одночасного врахування змін фізико-механічних полів у різних фізичних системах зумовлює актуальність досліджень, які пов'язані як із ускладненням математичних моделей для повнішого врахування процесів взаємодії, так і з розв'язуванням конкретних задач.

Ми мали на меті дослідити поведінку циліндричної оболонки та рідини в разі поширення ударної хвилі в рідкому наповнювачі з використанням уточненої теорії оболонок. Аналогічна задача досліджена в праці [2], де для моделювання акустичної взаємодії оболонки з рідиною використано співвідношення лінійної теорії оболонок Тимошенка – Міндліна та акустичне наближення рідини. Тут за основу моделі взято лінійні співвідношення оболонок Тимошенка – Міндліна з урахуванням обтиску нормального елемента [3,4] та акустичне наближення рідини. Формулювання початково-крайової та відповідної їй варіаційної задачі взаємодії двох середовищ наведено в [1]. Там же, за допомогою напівдискретизації Гальоркіна та апіорних енергетичних оцінок конструктивно доведено коректність варіаційної задачі взаємодії.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

У довільний момент часу t із проміжку $[0, T]$, $0 < T < +\infty$ вектор пружних зміщень $s = (u, w, \gamma_1, \gamma_3)$ серединної поверхні оболонки та потенціал швидкостей ψ

рідини обчислюють з варіаційної задачі взаємодії:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 \in \Phi, \psi_1 \in H, s_0 \in S, s_1 \in G \\ l \in L^2(0, T; \Phi'), \lambda \in L^2(0, T; S'); \\ \text{знайти пару } p = (\psi, s) \in L^2(0, T; \Phi \times S) \text{ таку, що} \\ m(\psi''(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) - b(s'(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle, \\ \mu(s''(t), g) + \eta(s(t), g) + b(g, \psi'(t)) = \langle \lambda(t), g \rangle, \\ m(\psi'(0) - \psi_1, \varphi) = 0, \mu(s'(0) - s_1, g) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi \\ a(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0, \quad \eta(s(0) - s_0, g) = 0, \quad \forall g = (v, y, \xi, \zeta) \in S, \quad \forall t \in (0, T] \end{array} \right. \quad (1)$$

в якій використані такі функціональні простори:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \{v \in H^1((0, L)) \mid v(0) = v(L) = 0\}, \quad Y = \{y \in H^1((0, L))\}, \\ \Xi = \{\xi \in H^1((0, L)) \mid \xi(0) = \xi(L) = 0\}, \quad Z = \{\zeta \in H^1((0, L))\}, \\ S = V \times Y \times \Xi \times Z, \quad G = [L^2((0, L))]^4, \\ \Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega)\}, \quad H = L^2(\Omega), \quad Q = S \times \Phi, \quad X = G \times H. \end{array} \right. \quad (2)$$

Детальний опис формулювання початково-крайової задачі, визначення білінійних і лінійних форм, що є у рівнянні варіаційної задачі (1), та умови її коректності наведено в [1]. Звідти і запозичено використані тут позначення.

Зокрема, в циліндричній системі координат (r, z, θ) розглянемо ізотропну циліндричну оболонку сталої товщини h , радіуса R та висоти L . Окрім цього верхній край оболонки шарнірно опертий, а нижній – жорстко закріплений в абсолютно жорсткій плиті. Нехай оболонка повністю заповнена нев'язкою стисливою рідиною. Припустимо, що на границі Γ_V розташований абсолютно жорсткий поршень маси m , який без тертя проковзує вздовж меридіана оболонки Γ_S . Будемо розглядати нестационарні осесиметричні процеси в системі оболонка - рідина, зумовлені імпульсом Q , прикладеним до поверхні поршня. У цьому випадку складові задачі (1) набудуть такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c^2} \psi \varphi r dr dz, \quad a(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz, \\ \mu(s, g) = \int_0^L \left(\rho h u v + \rho h w y + \frac{\rho h^3}{12} \gamma_1 \xi + \frac{\rho h^3}{12} \gamma_3 \zeta \right) R dz, \\ \eta(s, g) = \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_{jj}(s) \epsilon_{jj}(g) + M_{jj}(s) \kappa_{jj}(g)] + \right. \\ \left. + N_{33}(s) \epsilon_{33}(g) + N_{13}(s) \epsilon_{13}(g) + M_{13}(s) \kappa_{13}(g) \right\} R dz, \\ b(s, \varphi) = \int_0^L \left(w \varphi + \frac{h}{2} \gamma_3 \varphi \right) R dz, \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi, \quad \forall s, g \in S, \\ \langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f_0 \varphi r dr dz, \quad \langle \lambda, g \rangle = \int_0^L (P_1 v + P_3 y + m_1 \xi + m_3 \zeta) R dz. \end{array} \right. \quad (3)$$

Тут E , ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуасона; ρ – густина матеріалу оболонки; ρ_0 , c – густина рідини та швидкість поширення звуку в рідині.

3. ПРОЕКЦІНО-СІТКОВА СХЕМА

За основу числової процедури розв'язування варіаційної задачі (1) взято проекційно-сіткову схему, перший крок якої передбачає напівдискретизацію Гальоркіна [1,2] за просторовими змінними з використанням апроксимацій методу скінченних елементів, що дає змогу однозначно визначити напівдискретні апроксимації у вигляді розкладу за базисними функціями $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K$ і g_1, g_2, \dots, g_N скінченновимірних просторів $\{\Phi_h\} \subset \Phi$ та $\{S_h\} \subset S$, відповідно. Тоді напівдискретна апроксимація $(\psi_h(t), s_h(t))$ розв'язку задачі (1) набуде вигляду

$$(\psi_h(t), s_h(t)) = \left(\sum_{j=1}^K \psi_j(t) \Phi_j, \sum_{k=1}^N s_k(t) g_k \right) \quad (4)$$

з невідомими поки що коефіцієнтами $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^K$ та $\{s_k(t)\}_{k=1}^N$.

Для дискретизації варіаційної задачі в часі застосовують однокрокову рекурентну схему [2], у якій використано квадратичну апроксимацію розв'язку на кожному кроці інтегрування. Ця схема дає змогу виконувати інтегрування зі змінним кроком у часі Δt . Крім того, ця рекурентна схема дає змогу точно задовольнити початкові умови варіаційної задачі, а параметри $\Delta t, \beta, \theta$ рекурентної схеми забезпечують стійкість і точність обчислень. Використання матричних позначень допускає таке алгебричне подання цієї проекційно-сіткової схеми:

Задано $\Delta t, \beta, \theta = \text{const} > 0$, та вектори $(\Psi^j, S^j) \in R^N \times R^N$;

знайти вектор $(\Psi^{j+1}, S^{j+1}) \in R^N \times R^N$ такий, що

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_F & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B} \\ \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B}^T & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ G^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^j \\ S^j \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} L_j \\ \Lambda_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^j \\ G^j \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \Psi^{j+1} \\ S^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^j \\ S^j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ G^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi^{j+1} \\ G^{j+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ G^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^j \\ G^j \end{bmatrix} \quad j=0, \dots, N_T. \end{aligned} \quad (5)$$

4. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо алюмінієву ($E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0.3$) циліндричну оболонку радіуса $R = 1.5$ м, висоти $L = 3$ м, товщини $h = 0.03$ м. Нехай верхній край оболонки шарнірно опертий, а нижній жорстко закріплений у масивній плиті. Розрахунки виконаємо для випадку заповнення оболонки водою ($\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с). Припустимо, що вільна поверхня рідини обмежена абсолютно жорстким поршнем, який здатний без тертя проковзувати вздовж меридіана

оболонки. Гідроударна хвиля породжується імпульсом $Q = Q(t)$, прикладеним до зовнішньої поверхні поршня. Форма імпульсу задана функцією Куранта.

На рис. 1 показано розподіл поля тиску в рідині в різні моменти часу. Наявність оболонки суттєво впливає на форму гідроударної хвилі в рідкому наповнювачі. Простежується зменшення тиску рідини на гребені ударної хвилі в разі підходу до поверхні контакту з оболонкою, а за фронтом ударної хвилі починає розвиватись хвиля розрідження, спричинена коливаннями оболонки. Чітко виражений фронт хвилі розрідження ($t=0.0009$, $t=0.0018$) рухається вздовж радіальної змінної від оболонки до осі обертання конструкції. Крім того, зафіксовано збурення тиску в рідині у зоні контакту з оболонкою, які поширюються зі швидкістю, вдвічі більшою від швидкості поширення звуку в рідині. Для алюмінієвої оболонки швидкість поширення поздовжньої хвилі становить 5600 м/с, поперечної хвилі – 3200 м/с. Звідси випливає, що збурення в рідині породжуються поширенням поперечної хвилі в оболонці.

На рис. 2 зображено графіки зміщень серединної поверхні оболонки в момент часу $t=0.0006$ с. Варіант T відповідає задачі взаємодії, у якій для моделювання поведінки оболонки використано лінійні співвідношення Тимошенка – Міндліна, варіант TM – задачі взаємодії, у якій для моделювання поведінки оболонки було застосовано співвідношення оболонок Тимошенка – Міндліна з урахуванням обтиску нормального елемента. За час $t=0.0006$ с поздовжня хвиля в оболонці досягає жорсткого дна, що відображають графіки тангенціального зміщення серединної поверхні оболонки. Поперечна хвиля, як видно з графіків радіальних зміщень w та кутів повороту нормалі γ_1 , за цей самий час пробігає половину висоти оболонки.

5. ВИСНОВОК

Хвильовий процес у рідині породжує зміщення оболонки, які, відповідно, впливають на розподіл поля тиску в рідині. Числові результати виявили різке зниження тиску в гідроударній хвилі в зоні контакту, зумовлене радіальними зміщеннями оболонки. Внаслідок цього спостерігаємо утворення хвилі розрідження, яка поширюється в напрямі осі симетрії, досягаючи там максимального за модулем значення. Отже, в разі цього типу навантаження на розподіл поля тиску в рідині суттєво впливають поперечні хвилі. Зазначимо також, що застосування уточненої теорії оболонок дає змогу ліпше змоделювати поширення хвиль в оболонці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. Математична модель акустичної взаємодії оболонки з рідиною: I. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач // Матем. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45. № 2. С. 75-80.
2. Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А. Вплив циліндричної оболонки на поширення ударної хвилі в рідкому наповнювачі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С.13-20.
3. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка та коректність варіаційних задач динаміки // Математичні студії. 1998. Т. 10. № 2. С. 188-198.
4. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок // Доп. НАН України. Сер. Математика, природознавство, техн. науки. 1999. № 6. С. 54-59.

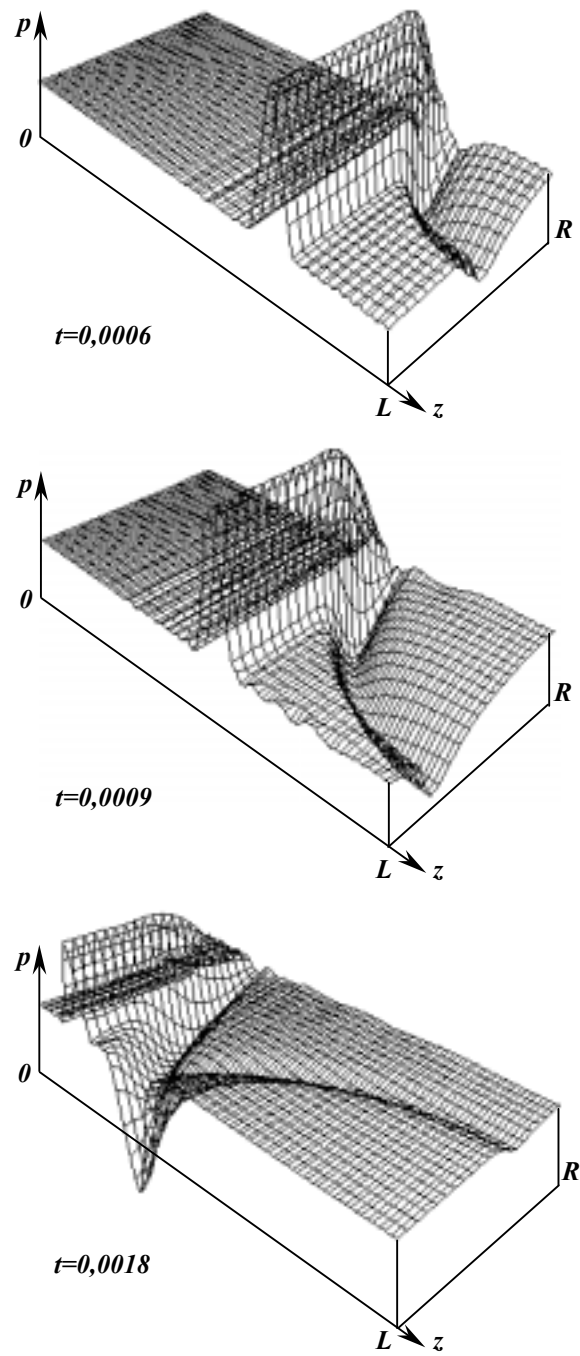
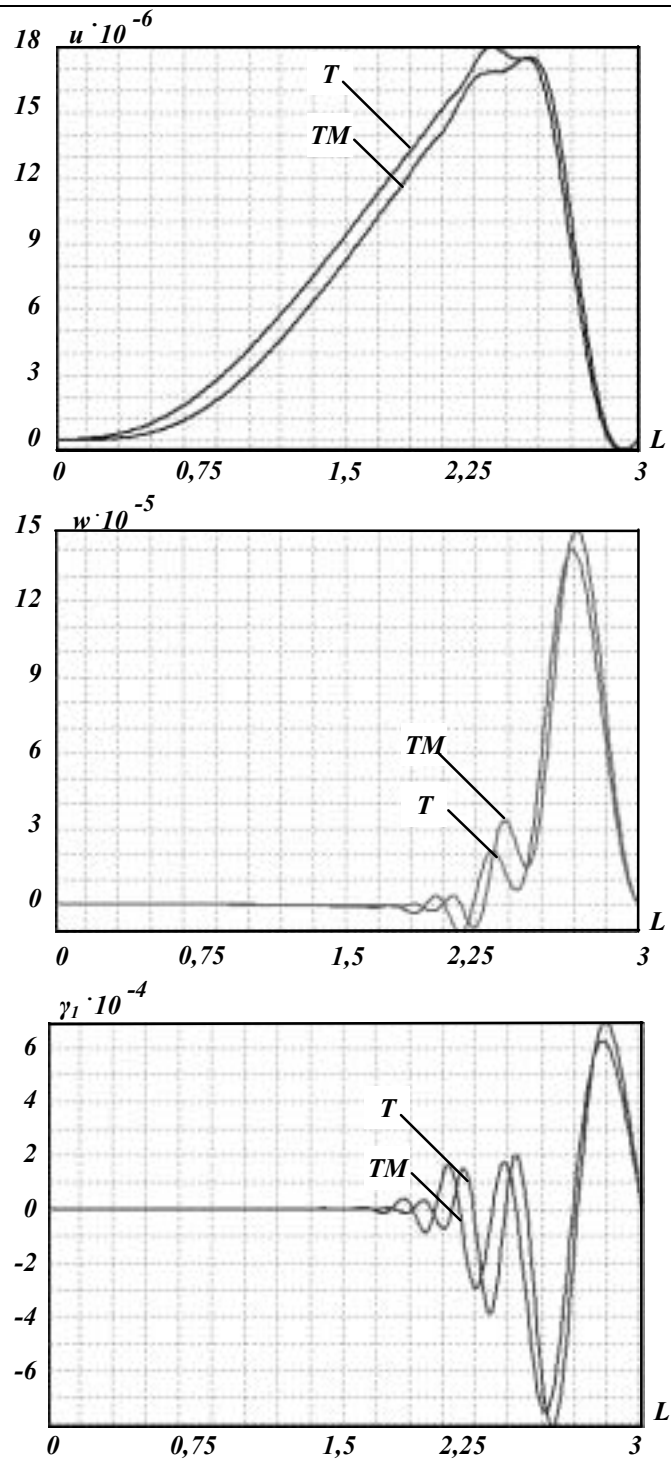


Рис. 1. Розподіл поля тиску в рідині в різні моменти часу.

Рис. 2. Зміщення середньої поверхні оболонки в момент часу $t=0.0006\text{s}$.

**CYLINDRICAL TIMOSHENKO – MINDLIN SHELL INFLUENCE
ON SPREADING A SHOCK WAVE IN THE FLUID FILLING****I. Bernakevych**

*Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: ibernyk@franko.lviv.ua*

A mathematical model of a problem of rotational shell – fluid acoustic interaction in case of axially symmetric load is constructed. The model is based on linear statements of Timoshenko – Mindlin shells that take into account pressing of a normal element and acoustic approximation of fluid equations. An initial-boundary value problem and a corresponding variational problem of interaction of two media is formulated. A projection-mesh scheme that provides Galerkin semi-discretization by spatial variables and one-step recurrent time integration scheme is constructed. The numerical research of behavior of the shell and liquid at their joint oscillation, stipulated by impulse load is carried out. Comparison of numerical results with corresponding results obtained in [] has been made.

Keywords: Timoshenk – Mindlin shell, initial-boundary value problem, variational problem, projection mesh scheme, Galerkin semidiscretization, one-step recurrent scheme.

*Стаття надійшла до редколегії 06.05.2004
Прийнята до друку 13.10.2004*