ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2004. Вип. 9. С. 74-84 *2004. No 9. P. 74-84*

УДК 519.63

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНОГО МЕТОДУ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З УМОВАМИ КВАЗІПЕРІОДИЧНОСТІ ТА БІЦАДЗЕ–САМАРСЬКОГО

І.Лазурчак

Дрогобицький державний педагогічний університет,
вул.Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100, e-mail: informatyka@drohobych.net

Розглянуто крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку із загальними крайовими умовами. Досліджено умови збіжності та двосторонності запропонованого функціонально-дискретного методу. Проаналізовано результати обчислювального експерименту, проведеного за допомогою систем символьної математики.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння; функціонально-дискретний метод; крайові умови; власні значення, спектральний радіус, системи символьної математики.

1. ВСТУП

Розглянемо задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$u''(x)-q(x)u(x)=-f(x),\quad x\in(0,1) \tag{1}$$

з лінійними крайовими умовами Діріхле – квазіперіодичності

$$u(0)=0\ ,\ \ u'(0)=2u'(1) \tag{2}$$

та Біцадзе–Самарського

$$u(0)=0\,,\quad u(\eta)=u(1)\,,\quad \eta\in[0,1)\,. \tag{3}$$

2. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД

Для розв’язування задач (1), (2) та (1), (3) пропонуємо функціонально-дискретний ФД-метод [1], згідно з яким

$$u(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j}U(x,t)}{\partial t^{j}},\qquad j=0,1,2,..., \tag{4}$$

де $U(x,t)$ – розв’язок загальної задачі

$$\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}-w(x,t)U(x,t)=-f(x)\,,\quad x\in(0,1)\,, \tag{5}$$

де $w(x,t)=\overline{q}(x)+t\left[q(x)-\overline{q}(x)\right]$, $t\in[0,1]$.

Крайові умови (2), (3) набувають, відповідно, вигляду

$$U(0,t)=0\,,\quad \left.\frac{U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=2\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}, \tag{6}$$

$$U(0,t)=0\,,\ \ U(\eta,t)=U(1,t)\ \ . \tag{7}$$

Введемо позначення

$$u^{(j)}(x)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j}U(x,t)}{\partial t^{j}},\qquad \text{j=0,1,2…}, \tag{8}$$

При t=0 розв'язуємо базову задачу, в якій рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{d^2u^{(0)}(x)}{dx^2}-\overline{q}(x)u^{(0)}(x)=-f(x)\,,\quad x\in(0,1)\,, \tag{9}$$

а лінійні крайові умови (6), (7) можна записати в загальному вигляді

$$M_1(u^{(0)})=0\,,\quad M_2(u^{(0)})=0\,. \tag{10}$$

Наближення вищих порядків знаходимо з рекурентної послідовності задач

$$\frac{d^2u^{(j+1)}(x)}{dx^2}-\overline{q}(x)u^{(j+1)}(x)=\left[q(x)-\overline{q}(x)\right]u^{(j)}(x)\,,\quad x\in(0,1)\,, \tag{11}$$

$$M_1(u^{(j+1)})=0\,,\quad M_2(u^{(j+1)})=0\,,\quad j=0,1,2,...\ . \tag{12}$$

У цьому разі $\overline{q}(x)$ вибираємо у вигляді кусково-сталої функції, яка апроксимує $q(x)$ знизу, наприклад, так:

$$\overline{q}(x)=\min q(x)\,,\quad x\in[x_{i-1},x_i]\,,\quad i=\overline{1,n}\,.$$

Базову задачу (9),(10) розв'язуємо через функцію Гріна

$$\overset{0}{u}(x)\equiv u^{(0)}(x)=\int_0^1 G(x,\xi,\overline{q}(\cdot))f(\xi)d\xi\,. \tag{13}$$

Розв'язки послідовності задач (11), (12) виразимо через рекурентні формули

$$u^{(m+1)}(x)=\int_0^1 G(x,\xi,\overline{q}(\cdot))u^{(m)}(\xi)\left[q(\xi)-\overline{q}(\xi)\right]d\xi\,, \tag{14}$$

а за наближення m-рангу, враховуючи (8), (13), приймаємо частинну суму ряду (4)

$$\overset{m}{u}(x)=\sum_{j=0}^{m}u^{(j)}(x)\,. \tag{15}$$

З огляду на припущення про невід'ємність функцій $G(x,\xi,\overline{q}(\cdot))$, $f(x)$ та виконання умови

$$\left\|q-\overline{q}\right\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot))<1 \tag{16}$$

гарантуємо збіжність ФД-методу (ряду (4)).

Використаємо означення рівномірної норми

$$\left\|q-\overline{q}\right\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}\left|q(x)-\overline{q}(x)\right| \tag{17}$$

та спектрального радіуса $r_0(\overline{q}(\cdot))$ (див. [2,с.153]) лінійного обмеженого оператора

$$Au=\int_0^1 G(x,\xi,\overline{q}(\cdot))u(\xi)d\xi\,. \tag{18}$$

Можна довести, що $r_0(\overline{q}(\cdot))=\left|\lambda_0(\overline{q}(\cdot))\right|$, де $\left|\lambda_0(\overline{q}(\cdot))\right|$ – найбільше за модулем власне значення оператора A з (18) або найменше власне значення спектральної задачі

$$u''(x)+\left[\lambda-\overline{q}(x)\right]u(x)=0\,,\quad M_1(u)=0\,,\quad M_2(u)=0\,. \tag{19}$$

Для забезпечення двосторонності наближень (15), тобто

$$\overset{2m-1}{u}(x)\le u(x)\le\overset{2m}{u}(x)\,,\quad m=0,1,...,\ \overset{-1}{u}(x)\equiv 0\,, \tag{20}$$

умови (16) недостатньо. Потрібно ще, наприклад, виконання умови

$$G_\alpha(x,\xi,\overline{q}(\cdot)) \equiv G(x,\xi,\overline{q}(\cdot)) - \alpha\int_0^1 G(x,\zeta,\overline{q}(\cdot))G(\zeta,\xi,\overline{q}(\cdot))d\zeta \ge 0\,, \tag{21}$$

де $\alpha = \left\| q - \overline{q} \right\|_\infty$ (хоча, як буде зазначено, така умова є надто жорсткою).

Побудова функцій Гріна для різних типів крайових умов та числова реалізація ФД-методу розглянуті нижче.

3. УМОВИ ТИПУ КВАЗІПЕРІОДИЧНОСТІ

Нехай

$$M_1(u) = u(0),\ \ M_2(u) = u'(0) - 2u'(1), \tag{22}$$

тобто на лівому кінці проміжку [0,1] поставлено крайову умову Діріхле, а на правому – квазіперіодичності.

Дослідимо виконання умови (21), у разі вибору $\overline{q}\,(x) \equiv 0$. Тоді функція Гріна

$$G(x,\xi,0) = \begin{cases} 2x, & x \le \xi, \\ x+\xi, & x \ge \xi. \end{cases}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $x \le \xi$. Тоді

$$G_\alpha(x,\xi,0) = 2x - \alpha\left(x - \frac{1}{3}x^3 - x\xi^2 + 2x\xi \right). \tag{23}$$

Як видно, при α=0 функція $G_\alpha(x,\xi,0) \ge 0$, а, отже, потрібно знайти таке найбільше значення $\alpha_{\max}$, за якого умова (21) виконується $\forall x,\xi \in [0,1]$. Для цього знайдемо екстремуми функції (23) або її найменше значення на границі області

$$D_1 = \{(x,\xi), 0 \le x,\xi \le 1,\ 0 \le x \le \xi\}. \tag{24}$$

При $\alpha < 1$ локальних екстремумів немає. При $1 \le \alpha \le 2$ стаціонарні точки

$$(x_1,\xi_1) = \left(0,\, 1-\sqrt{2-2/\alpha}\right),\ (x_2,\xi_2) = \left(\sqrt{2-2/\alpha}\,,1\right)$$

лежать на границі області D_1. У цьому разі $G_\alpha(0,\xi,0) = 0$ незалежно від вибору α та ξ з області допустимих значень. При $\xi = 1$ функція (23) має вигляд

$$G_\alpha(x,1,0) = \frac{1}{3}x[\alpha x^2 + 6(1-\alpha)] \ge 0$$

і набуває від'ємних значень на інтервалі $[0, \sqrt{6-6/\alpha}\,]$. Для того, щоб вона набувала невід'ємних значень $\forall x \in [0,1]$, необхідно вибрати $\alpha = 1$.

При $x = \xi$ функція (23) має вигляд

$$G_\alpha(x,x,0) = x\,(4\alpha x^2 - 6\alpha x - 3\alpha + 6)\,/\,3$$

і набуває невід'ємних значень при $\alpha \le 8/7$.

Отже, для випадку $x \le \xi$ треба вибрати $\alpha_{\max} = 1$, за якого $G_\alpha(x,\xi,0) \ge 0$.

Нехай $x \ge \xi$. Тоді

$$G_\alpha(x,\xi,0) = x + \xi - \alpha\left(x - \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\xi^2 - \frac{1}{2}\xi x^2 + 2x\xi \right). \tag{25}$$

Аналогічно досліджуємо цю функцію в області $D_2 = \{(x,\xi),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le \xi \le x\}$. При $1 \le \alpha < 8/7$ її стаціонарні точки

$$\left(x_i,\xi_i\right)=\left(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)},\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right),\ i=1,2$$

є внутрішніми точками області D_2. У цих точках досяжний мінімум

$$G_\alpha\left(x_i,\xi_i,0\right)=\left(1-\frac{23}{24}\alpha\right)\pm\sqrt{2-\frac{2}{\alpha}}(1-\alpha),\ (\ i=1,2\ ), \tag{26}$$

оскільки виконуються умови

$$B^2-AC<0,\qquad B=\left.\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial\xi}\right|_{(x_i,\xi_i)}=-\alpha\left(2-x_i-\xi_i\right)<0\ ,$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}\right|_{(x_i,\xi_i)}=\alpha\left(x_i+\xi_i\right)>0\ ,\ C=\left.\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \xi^2}\right|_{(x_i,\xi_i)}=\alpha\left(x_i+\xi_i\right)>0\ .$$

Для невід'ємності виразів (26) діапазон допустимих значень α ще більше звужується і становить

$$1\le\alpha\le 1.03668821\ (\ i=1),\quad 1\le\alpha\le 1.05624812\ (\ i=2\ ).$$

Залишається дослідити функцію (25) на границі області D_2. При $\xi=0$ ця функція

$$G_\alpha(x,1,0)=\frac{1}{6}\left[\alpha x^2+6(1-\alpha)\right]\!0\ ,\ x\in\left[\sqrt{6-6\alpha}\ ,1\right].$$

Для того, щоб вона набувала невід'ємних значень $\forall x\in[0,1]$, необхідно вибрати $\alpha=1$.

При $x=1$ функція (24) має вигляд

$$G_\alpha(1,\xi,0)=1+\xi+\frac{\alpha}{6}\left(\xi^3+3\xi^2-9\xi-5\right)$$

і мінімум

$$G_\alpha\left(1,\sqrt{2\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)}-1,\ 0\right)=\alpha+\frac{2(1-2\alpha)}{3}\sqrt{2\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)},$$

який набуває невід'ємних значень при $\alpha\le\frac{1}{55}\left(8\sqrt[3]{9}+6\sqrt[3]{3}+32\right)\approx 1.041712146$.

Випадок $x=\xi$ досліджений вище.

Отже, для обох розглянутих випадків залишається лише значення $\alpha_{\max}=1$, за якого $G_\alpha(x\ \ ,\xi\ \ ,0)\ge 0$ і ФД-метод є двостороннім.

Для дослідження збіжності методу розглянемо таку спектральну задачу

$$u''(x)+\lambda\, u(x)=0\,,\quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)-2u'(1)=0.$$

Її найменшим власним значенням є $\lambda_1=(\pi/3)^2$. Отже, найбільше власне значення оператора A з (18), тобто його спектральний радіус – $r_0(0)=1/\lambda_1=(3/\pi)^2$. Тому за умови $\|q\|_\infty<(\pi/3)^2$ ФД-метод буде збіжним.

Числові результати розв'язування задачі (1), (22) при

$$q(x)=9+\frac{11}{4}x^2,\quad f(x)=2-2x+\frac{1}{12}x(6-3x+x^2)(36+11x^2),$$

для якої відомий точний розв'язок $u_{\mathrm{T}}(x)=x(2-x+x^2/3)$, отримані в системі символьної математики (ССМ) Mathematica 4.2 [3] у разі вибору різних функцій $\overline{q}(x)$.

Таблиця 1

Вар.	$\overline{q}=\frac{74}{16}$		$\overline{q}=\frac{75}{16}$		$\overline{q}=9$	
m	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right)-\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right)-\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right)-\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$
0	1,56411738	-0.7725	1.54717027	-0.7555	0.88457942	-0.929E-1
1	0,01309491	0.7786	0.04656760	0.7451	0.77804938	0.136E-1
2	1,58122942	-0.7896	1.53111247	-0.7394	0.79374206	-0.208E-2
3	-0.0989160	0.8016	0.05703073	0.7346	0.79134839	0.318E-3
4	1,60554842	-0.8139	1.52165945	-0.7299	0.79171552	-0.489E-4
5	-0,03475282	0.8264	0.06626496	0.7254	0.79165917	0.750E-5
6	1,66557388	-0.8392	1.51250990	-0.7208	0.79166782	-0.115E-5
7	–	–	0.07534927	0.7163	0.79166649	0.177E-6
8	–	–	1.50350091	-0.7118	0.79166669	-0.279E-7

Як видно з табл. 1, у випадку $\overline{q}=\frac{74}{16}$, умова (16) не виконується

$$\|q-\overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot))=(57/8)\cdot\left(\pi^2/9+37/8\right)^{-1}\approx 1.245$$

і ФД-метод є розбіжний (хоча і двосторонній). У випадку $\overline{q}=\frac{75}{16}$, коли правильна оцінка

$$\|q-\overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot))=(113/16)\cdot\left(\pi^2/9+75/16\right)^{-1}\approx 1.221,$$

умова (16) також не виконується, проте ФД-метод є збіжний. У випадку $\overline{q}=9$,

$$\|q-\overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot))=(11/4)\cdot\left(\pi^2/9+9\right)^{-1}=99/(4\pi^2+324)<1,$$

достатня умова збіжності (16) виконується, і метод збіжний.

На рис. 1 зображено графіки точного розв'язку, а також наближень нульового та першого рангів, отриманих аналітично:

$$\overset{0}{u}(x)=-0{,}09+2{,}56x-1{,}41x^2+1{,}17x^3-0{,}31x^4+0{,}1x^5+0{,}09ch3x-0{,}14sh3x;$$

$$\overset{1}{u}(x)=0{,}135+1{,}29x-0{,}39x^2-0{,}73x^3+0{,}43x^4-0{,}4x^5+0{,}09x^6-0{,}03x^7-$$
$$-(0{,}135+0{,}0035x+0{,}0069x^2+0{,}021x^3)ch3x+(0{,}23+0{,}0023x+0{,}0106x^2+0{,}0138x^3)sh3x$$

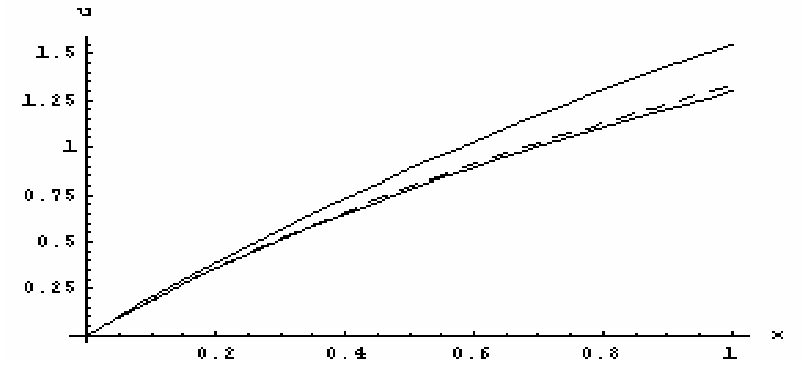

Рис. 1. Наближення 0,1-рангів (верхня та нижня криві) та точний розв'язок (style-Dashing)

4. УМОВИ БІЦАДЗЕ–САМАРСЬКОГО

Розглянемо крайові умови, у яких, крім граничних точок, бере участь деяка точка з напівзакритого інтервалу, а саме:

$$M_1[u] = u(0)\,,\ M_2[u] = u(\eta) - u(1)\,,\ \eta \in [0,1)\,. \tag{27}$$

Дослідимо випадок, коли $\overline{q}(x) \equiv 0$. Тоді функцію з (21) можна записати у вигляді

$$G_\alpha(x,\xi,0) = \frac{1}{1-\eta}\left[\left(1 - \frac{\eta+\xi+|\eta-\xi|}{2}\right)\frac{x+\xi-|x-\xi|}{2} + \frac{\eta-\xi-|\eta-\xi|}{2}\frac{\eta-\xi+|\eta-\xi|}{2}\cdot H(x-\xi)\right], \tag{28}$$

де H(v) – функція Хевісайда.

При $\eta = 0$ крайові умови (27) відповідають умовам першого роду. Тоді функція Гріна набуває вигляду

$$G(x,\xi,0) = \begin{cases} x(1-\xi), x \le \xi \\ \xi(1-x), x \ge \xi \end{cases},$$

Унаслідок того, що вона симетрична, достатньо дослідити умову (21) лише для випадку, наприклад, $x \le \xi$. Тоді

$$G_\alpha(x,\xi,0) = x(1-\xi) - \alpha\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3\xi + \frac{1}{6}x\xi^3 - \frac{1}{2}x\xi^2 + \frac{1}{3}x\xi\right).$$

Стаціонарні точки цієї функції знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_\alpha(x,\xi,0)}{\partial x} = 1-\xi-\alpha\left(-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\xi x^2 + \dfrac{1}{6}\xi^3 - \dfrac{1}{2}\xi^2 + \dfrac{1}{3}\xi\right) = 0, \\ \dfrac{\partial G_\alpha(x,\xi,0)}{\partial \xi} = -x - \alpha\left(\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x\xi^2 - x\xi + \dfrac{1}{3}x\right) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Коренями цієї системи є точки, що належать області D_1 з (24)

$$(x_1,\xi_1) = \left(0,\ 1-\sqrt{1-6/\alpha}\right),\ \ (x_2,\xi_2) = (0,1),\ \ (x_3,\xi_3) = \left(\sqrt{1-6/\alpha},\ 1\right).$$

За умови $\alpha \ge 6$ для заданих наборів $G_\alpha(x_i,\xi_i,0) = 0$, $i = 1,2,3$.

Крім цього, є ще внутрішня точка з області D_1, яка задовольняє систему (29)

$$\left(x_4,\xi_4\right)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{6}{\alpha}},\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{6}{\alpha}}\right),\quad \alpha>6\,.$$

Внаслідок того, що виконується умова $B^2-AC<0$ при

$$A=\left.\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}\right|_{(x_4,\xi_4)}=\alpha x_4\left(1-\xi_4\right)>0\,,\quad C=\left.\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \xi^2}\right|_{(x_4,\xi_4)}=\alpha x_4\left(1-\xi_4\right)>0\,,$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 G_2}{\partial x\partial\xi}\right|_{(x_4,\xi_4)}=-1-\alpha\left(\frac{1}{2}x_4^2+\frac{1}{2}\xi_4^2-\xi_4+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)<0\,,$$

у заданій стаціонарній точці досяжний мінімум функції

$$G_\alpha\left(x_4,\xi_4,0\right)=-\frac{1}{48}\frac{(\alpha-6)^2}{\alpha}<0\,.$$

Цей вираз матиме нульове значення тільки при $\alpha=6$.

На границі області D_1 при $x=0$ та $\xi=1$ $G(0,\xi,0)=G(x,1,0)=0$. При $x=\xi$

$$G_\alpha(x,x,0)=x(1-x)[1-\frac{1}{3}\alpha x(1-x)]<0,\quad \alpha>12.$$

Отже, $\alpha_{\max}=6$ є максимальним значенням, за якого виконується умова (21) і ФД-метод є збіжним.

Аналітичне знаходження такого $\alpha_{\max}$ для довільних значень $\eta\in(0,1)$ пов'язане з громіздкими зображеннями, проте використання графічних процедур тривимірної графіки CCM Maple 8 [4], дає змогу в динаміці повернути просторові фігури і дослідити знакосталість функції $G_\alpha(x,\xi,0)$. На рис. 2а показано один із різновидів графіка заданої функції при $\alpha=8$ для раніше дослідженого випадку $\eta=0$. Крім того, за допомогою процедури

$$piecewiseG_\alpha(x,\xi,0)=\begin{cases}G_\alpha(x,\xi,0), G_\alpha(x,\xi,0)<0,\\ \quad 0,\quad otherwise\end{cases}$$

верхня частина графіка відтята, а виділена нижня частина масштабована відносно значення глобального мінімуму (рис. 2б).

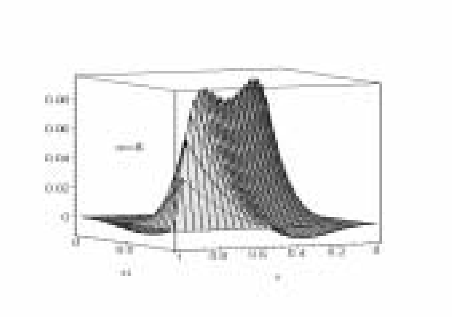

Рис. 2а. $G_8(x,\xi,0)$

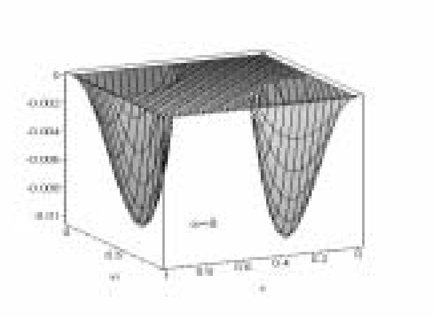

Рис. 2б. Piecewise $G_8(x,\xi,0)$

Далі α поступово зменшується, і процес триває доти, поки на останньому графіку буде зображена лише координатна площина $x\mathbf{O}\xi$ (рис. 3б).

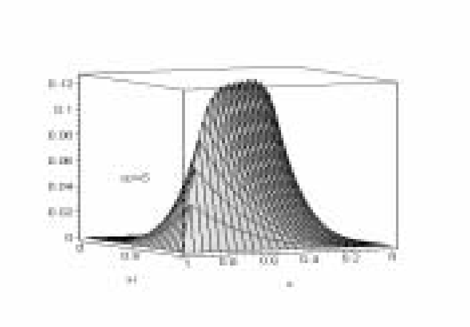

Рис. 3а. $G_6(x,\xi,0)$

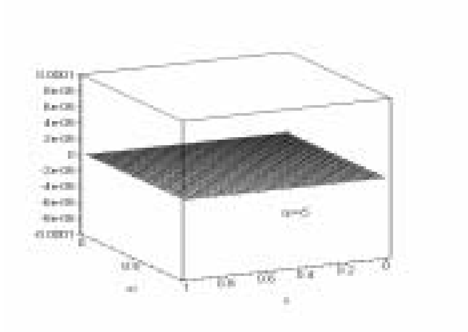

Рис. 3б. Piecewise $G_6(x,\xi,0)$

В табл. 2 показано різні значення параметра η та відповідні їм значення $\alpha_{\max}$, отримані в ході обчислювального експерименту, за яких умова (21) виконується.

Таблиця 2.

η	0	0.1	0.35	0.6	0.85
$\alpha_{\max}$	6	5.405	4.074	3.061	2.332

На рис. 4 відображена аналітична залежність $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(\eta)$.

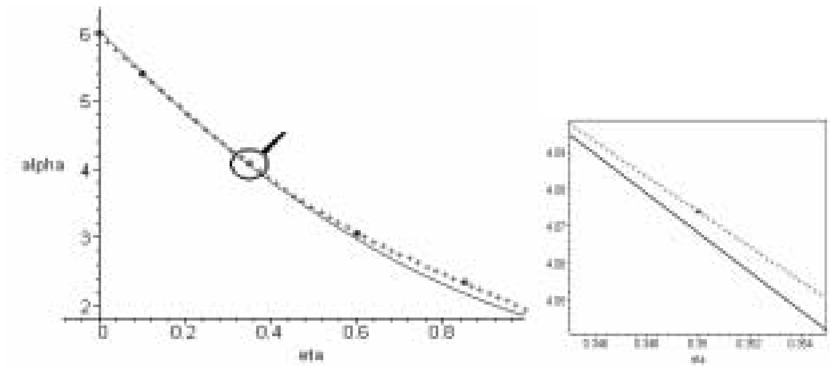

Рис. 4. Кубічний сплайн (*style-cross*) та кубічна регресія (*style-line*)

Тут відповідно до отриманих емпіричних даних, зображених на рис. 4 у стилі "*circle" and "cross*", застосована кубічна сплайн-інтерполяція

$$spline(\eta,\alpha_{\max},cubic)=\begin{cases}6-6.007\eta+5.724\eta^3, & 0\le\eta<0.1,\\ 6.004-6.140\eta-1.323\eta^2+1.315\eta^3, & 0.1\le\eta<0.35,\\ 6.059-6.609\eta+2.664\eta^2+0.038\eta^3, & 0.35\le\eta<0.6,\\ 6.854-10.584\eta+9.289\eta^2-3.643\eta^3, & 0.6\le\eta<1\end{cases}$$

і регресійний аналіз за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки відхилення, у результаті якої побудована крива третього порядку,

$$fit[leastquare]([\eta,\alpha_{\max}]) := 6.004 - 6.297\eta + 2.266\eta^2 + 0.073\eta^3 .$$

Наведені аналітичні наближення дають змогу оцінити $\alpha_{\max}(\eta)$. Наприклад, порівняно з теоретично обчисленим значенням $\alpha_{\max}$ при $\eta = 0$ відхилення кубічної регресії не перевищує 0.004.

Найменшим власним значенням задачі (19), (27) при $\overline{q}(x) \equiv 0$ буде $\lambda_0(0) = [\pi/(1+\eta)]^2$. Отже, у разі виконання умови $\|q\|_\infty [(1+\eta)/\pi]^2 < 1$, ФД-метод буде збіжним.

Числові результати розв'язування задачі (1), (27) при $q(x) = 9 + 6x^2$, $f(x) = -6x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 12x + 2$, для якої відомий її точний розв'язок $u_T(x) = x(1+\eta-x)$, отримані в ССМ Mathematica 4.2 у разі вибору різних функцій $\overline{q}(x)$ та фіксованого параметра $\eta = 1/4$ і наведені в табл. 3.

Таблиця 3.

Вар.	$\overline{q} = 2.25$		$\overline{q} = 2.28$		$\overline{q} = 9$	
m	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right) - \overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right) - \overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$	$u_T\left(\frac{1}{2}\right) - \overset{m}{u}\left(\frac{1}{2}\right)$
0	0.75557835	-0.3806	0.75291247	-0.3779	0.41922911	-0.4423E-1
1	-	0.3821	-	0.3768	0.36923455	0.5116E-2
2	0.00713675	-0.3830	0.00182377	-0.3751	0.37576847	-0.7684E-3
3	0.75802113	0.3838	0.75007288	0.3732	0.37489719	0.1028E-3
4	0.00879333	-0.3845	0.00178126	-0.3714	0.37501404	-0.1404E-4
5	0.07595484	-	0.74635566	0.3694	0.37499836	0.1641E-5
6	9	-	0.00555352	-0.3652	0.37500018	-0.1833E-6
	-		0.74024381			
	-					

Тут, аналогічно до прикладу з пункту 3, у випадку $\overline{q} = 2.25$ умова (16) не виконується:

$$\|q - \overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot)) = 12.75 \cdot \left(0.64\pi^2 + 2.25\right)^{-1} \approx 1.4884$$

і ФД-метод є розбіжний . У випадку $\overline{q} = 2.28$, коли правильна оцінка

$$\|q - \overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot)) = 12.72 \cdot \left(0.64\pi^2 + 2.28\right)^{-1} \approx 1.4796 ,$$

умова (16) також не виконується, проте ФД-метод є збіжний. У випадку $\overline{q} = 9$

$$\|q - \overline{q}\|_\infty r_0(\overline{q}(\cdot)) = 6\left(0.64\pi^2 + 9\right)^{-1} = 0.3917 < 1 ,$$

достатня умова збіжності (16) виконується і метод збігається.

Двосторонність ФД-методу простежується у всіх наведених випадках.

На рис. 5 зображено графіки точного розв'язку, а також наближення нульового та першого рангів, отриманих аналітично.

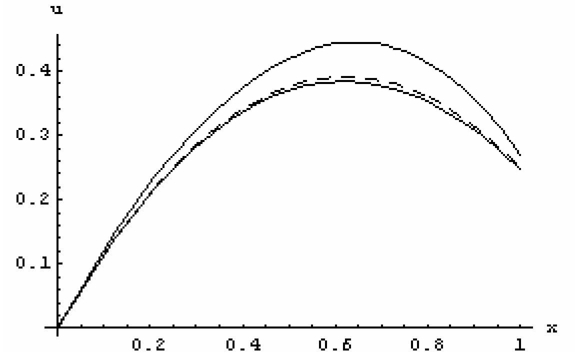

Рис. 5. Наближення 0,1-рангів (верхня та нижня криві) та точний розв'язок (style-Dashing)

Числово досліджено залежність мінімального значення сталої $\overline{q}$ та відповідної їй норми $\|q-\overline{q}\|_{\infty}$, а також найменшого власного значення $\lambda_0(\overline{q}(\cdot))$ від параметра η, за яких забезпечена експериментальна збіжність методу.

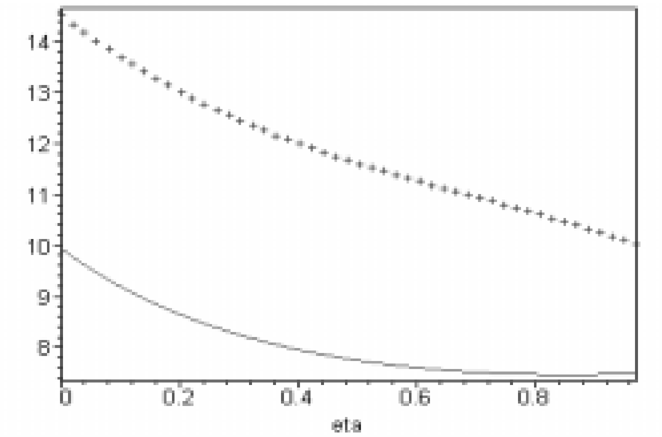

Рис. 6. $\|q-\overline{q}\|_{\infty} : style-cross,\ 1/r_0(\overline{q}(\cdot)) : style-line.$

Порівняльний аналіз зображених на рис. 6 величин, які є в оцінці $\|q-\overline{q}\|_{\infty} < 1/r_0(\overline{q}(\cdot))$ (див.(16)), засвідчує, що достатню умову збіжності можна дещо послабити.

5. ВИСНОВКИ

Отже, виконані дослідження дали змогу отримати якісні результати, а саме: за допомогою числово-аналітичного підходу проаналізувати умови збіжності та двосторонності функціонально-дискретного методу. Обчислювальний експеримент, реалізований за допомогою сучасних математичних пакетів, засвідчив високу ефективність та надійність запропонованого методу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Макаров В.Л., Лазурчак И.И.* Двухсторонний функционально-дискретный метод для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. №7. С. 955-962.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированых пространствах. Физматгиз, 1959.
3. *Wolfram S.* Mathematica, a system for doing mathematics by computer. Addison Wesley, 1988.
4. *Дьяконов В.П.* Математическая система Maple V. М.: Солон, 1998. 400 с.

PROBLEMS WITH THE QUAZIPERIODICAL AND BITSADZE-SAMARSKY'S CONDITIONS

I. Lazurchak

State Pedagogical University
3 Stryjska St.,82100, Drohobych, Ukraine, e-mail: informatyka@drohobych.net

In the paper the boundary value problem for ordinary differential equations of the second order with the general regional conditions is considered. The conditions of convergence and two-sided of the offering functional-discrete (FD) method are presented. The outcomes of computing experiment made by using a system of symbolic mathematics are analyzed.

Key words: ordinary differential equation; functional-discrete method; ; two-point boundary value problem; eigen value, system of symbolic mathematics.

Стаття надійшла до редколегії 19.04.2004
Прийнята до друку 06.10.2004