ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2004. Вип. 8. С. 152-161 *2004. No 8. P. 152-161*

УДК 519.6

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ КОНВЕКЦІЇ - ДИФУЗІЇ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. Лаврик, Р.Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: chapko@franko.lviv.ua

Для чисельного розв'язування нестаціонарної задачі конвекції - дифузії застосовано поєднання методу Роте за часовою змінною та методу граничних інтегральних рівнянь за простором. У результаті вихідну задачу редуковано до послідовності інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрах. Повну дискретизацію виконано методом квадратур з використанням тригонометричних квадратурних формул. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: нестаціонарна задача конвекції - дифузії, метод Роте, граничні інтегральні рівняння, метод квадратур.

1. ВСТУП

Метод граничних інтегральних рівнянь застосовують для граничних задач переважно з метою певних теоретичних досліджень: доведення існування розв'язку, стійкості тощо. Водночас інтегральні рівняння дають змогу розробляти для диференціальних задач чисельні методи, які мають певні переваги порівняно з методами скінченних елементів чи скінченних різниць. Часто з цією метою використовують метод граничних елементів, який є застосовним для випадку складних границь. З іншого боку, становить інтерес використання інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування граничних задач із параметрично заданими границями. У цьому випадку можна виконати низку аналітичних перетворень, спростити процедуру чисельного розв'язування й отримати високий порядок збіжності. Такий підхід застосовано у працях [2,6-9] до стаціонарних і нестаціонарних задач. Наявність часу, як незалежної змінної, передбачає додаткові труднощі в разі чисельного розв'язування нестаціонарних задач. Один із способів усунення часової змінної полягає у використанні методу Роте за часом. У результаті отримують рекурентну послідовність стаціонарних граничних задач, до якої застосовують метод граничних інтегральних рівнянь. Такий було розвинуто у працях [2, 6-8] для різних початково-крайових задач. Ми переносимо цю методику на новий клас задач – нестаціонарні задачі конвекції - дифузії. Зазначимо, що в [5] до такого типу задач застосовано скінченно - різницеві і скінченно - елементні апроксимації, а в [10] для наближеного розв'язування сингулярно збуреної стаціонарної задачі конвекції - дифузії у многокутнику використано метод інтегральних рівнянь.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ Й МЕТОД РОТЕ

Нехай $\Omega \subset R^2$ – обмежена однозв'язна область з границею $\partial\Omega \in C^2$. Необхідно знайти функцію $u \in C^2(\Omega\times(0,T]) \cap C(\overline{\Omega}\times(0,T])$ таку, що задовольняє нестаціонарне рівняння конвекції - дифузії

$$\partial u(x,t)/\partial t - \Delta u(x,t) + (\vec{v}, \nabla u(x,t)) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0;T], \tag{1}$$

граничну умову

$$u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \tag{2}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

де $T > 0$ і $\vec{v} = (v_1, v_2)$ – задані сталі.

Будемо вважати також, що для граничної функції виконується умова погодженості $f(x,0) = 0, x \in \partial\Omega$.

Відомо [4], що для $f \in C(\partial\Omega \times (0,T])$ задача (1) - (3) є коректно сформульованою.

Застосуємо до задачі (1) – (3) метод Роте [7] за часовою змінною. Нехай $t_n = n\tau$, $n = 0,1,...,N$, $\tau = T/N$, $N \in \mathrm{N}$ – рівномірний поділ інтервалу $(0,T]$. Для апроксимації $\partial u/\partial t$ з першим порядком точності скористаємось формулою лівих різниць. У результаті з (1) - (3) отримаємо послідовність граничних задач для еліптичних рівнянь

$$\Delta u_n(x) - \frac{1}{\tau} u_n(x) - \left(\vec{v}, \nabla u_n(x)\right) = -\frac{1}{\tau} u_{n-1}(x), \; n = 1,...,N, \; x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u_n(x) = f_n(x), \; x \in \partial\Omega, \tag{5}$$

$$u_0 = 0, \, x \in \Omega. \tag{6}$$

Тут $u_n(x) \approx u(x,t_n)$, $f_n(x) = f(x,t_n)$.

Для апроксимації $\partial u/\partial t$ з другим порядком точності запишемо очевидні співвідношення [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_n) = \frac{u(x,t_n) - u(x,t_{n-1})}{\tau} + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x, t_n - \theta_n \tau), \; \theta_n \in [0,1], \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_{n-1}) = \frac{u(x,t_n) - u(x,t_{n-1})}{\tau} + \frac{\tau}{2} u_{tt}\left(x, t_n - \tilde{\theta}_n \tau\right), \tilde{\theta}_n \in [0,1]. \tag{8}$$

Підставимо по черзі (7) та (8) у рівняння (1) та почленно віднімемо отримані рівності, тоді

$$\frac{2}{\tau} u_n - \frac{2}{\tau} u_{n-1} - \Delta u_n - \Delta u_{n-1} + \left(\vec{v}, \nabla u_n\right) + \left(\vec{v}, \nabla u_{n-1}\right) + \rho = 0,$$

де $\rho = O(\tau^2)$.

Знехтуємо ρ, отримаємо

$$\Delta u_n - \frac{2}{\tau} u_n - \left(\vec{v}, \nabla u_n\right) = -\Delta u_{n-1} - \frac{2}{\tau} u_{n-1} + \left(\vec{v}, \nabla u_{n-1}\right).$$

За індукцією легко бачити, що

$$\Delta u_n - \frac{2}{\tau} u_n - \left(\vec{v}, \nabla u_n\right) = \sum_{m=1}^{n-1} \beta_{n-m} u_m, \tag{9}$$

де $\beta_i = (-1)^i \frac{4}{\tau}$.

До співвідношень (9) додаємо умови (5) та (6) й отримаємо, як і в попередньому випадку, послідовність граничних задач для еліптичних рівнянь.

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

*Означення **1.*** Фундаментальними розв'язками послідовності задач (4) - (6) називають функції $\Phi_i(x,y)$, $i=1,...,N$, які задовольняють умову

$$\Delta\Phi_i(x,\ y)-\frac{1}{\tau}\Phi_i(x,\ y)-\left(\vec{v},\ \nabla\Phi_i(x,\ y)\right)=\delta\left(|x-y|\right)-\frac{1}{\tau}\Phi_{i-1}(x,\ y). \qquad (10)$$

Тут $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\Phi_0(x,y)=0$, δ – функція Дірка, і диференціювання відбувається за x.

Теорема 2. Функції Φ_n, $n=1,\dots,N$ мають вигляд

$$\Phi_n(x,y)=-e^{\frac{1}{2}(x-y,\vec{v})}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{v_0}{\tilde{v}_0}\right)^{2j}\left[\Psi_j\left(\tilde{v}_0,|x-y|\right)-\Psi_{j-1}\left(\tilde{v}_0,|x-y|\right)\right],$$

де $\Psi_n(k,r)=K_0(kr)v_n(r)+K_1(kr)\omega_n(r)$, $n=0,...,N-1$, *причому* $\Psi_{-1}(k,r)=0$, K_0, K_1 – *модифіковані функції Бесселя,* v_n, ω_n – *відомі поліноми (див. [6]).*

Доведення. Застосуємо пряме перетворення Фур'є до (10), зафіксувавши довільне $\tilde{y}\in\Omega$ та позначивши $\Phi(x)=\Phi(x-\tilde{y},\tilde{y})$. У результаті в просторі зображень для $\hat{\Phi}_n(\xi)=F(\Phi(x))=c_\pi\int\limits_{R^2}\Phi(x)e^{-i(x,\xi)}dx$ отримаємо

$$-|\xi|^2\hat{\Phi}_n-\frac{1}{\tau}\hat{\Phi}_n-i\left(\xi,\vec{v}\right)\hat{\Phi}_n=1-\frac{1}{\tau}\hat{\Phi}_{n-1}.$$

Тоді

$$\hat{\Phi}_n=C\hat{\Phi}_{n-1}-D,$$

де $C=\dfrac{v_0^2}{|\xi|^2+v_0^2+i\left(\xi,\vec{v}\right)}$, $D=\dfrac{1}{|\xi|^2+v_0^2+i\left(\xi,\vec{v}\right)}$. Тоді

$$\hat{\Phi}_n=C\hat{\Phi}_{n-1}-D=C(C\hat{\Phi}_{n-2}-D)=\ldots=C^{m-1}C\hat{\Phi}_1-D\sum_{i=0}^{n-2}C^i.$$

Оскільки $\hat{\Phi}_1=-D$, то

$$\hat{\Phi}_n=-D\sum_{i=0}^{n-1}C^i=-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{v_0^{2i}}{\left[|\xi|^2+v_0^2+i\left(\xi,\vec{v}\right)\right]^{i+1}}.$$

Отже, для оберненого перетворення Фур'є маємо

$$F^{-1}\left(\hat{\Phi}_n\right)=c_\pi\int\limits_{R^2}\hat{\Phi}_ne^{i(x,\xi)}d\xi=-c_\pi e^{\frac{1}{2}(x,\vec{v})}\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{R^2}\left(\frac{v_0}{\tilde{v}_0}\right)^{2j}\frac{\tilde{v}_0^{2j}e^{i\left(x,\tilde{\xi}\right)}}{\left[|\xi|^2+\tilde{v}_0^2\right]^{j+1}}d\tilde{\xi}. \qquad (11)$$

У [6] доведено справедливість такої формули обертання

$$F^{-1}\left(\frac{\gamma^{2n}}{\left(|\xi|^2+\gamma^2\right)^{n+1}}\right)=\Psi_n\left(\gamma,|x|\right)-\Psi_{n-1}\left(\gamma,|x|\right).$$

Використаємо тепер це співвідношення в (11) та врахуваємо довільність $\tilde{y}$, отримаємо твердження теореми.

Важливою властивістю функцій $\Phi_n\left(x,y\right)$ є логарифмічна особливість при $y\to x$.

Теорема 2. Функції Φ_n, $n=1,...,N$ можна записати у вигляді

$$\Phi_n\left(x,y\right)=\Phi_n^{(1)}\left(x,y\right)\ln\frac{2}{\tilde{v}_0\left|x-y\right|}+\Phi_n^{(2)}\left(x,y\right),$$

де $\Phi_n^{(1)},\Phi_n^{(2)}\in C^1\left(\Omega\times\Omega\right)$.

Доведення. Очевидно, що наші фундаментальні розв'язки можна записати у вигляді

$$\Phi_n\left(x,y\right)=-S\left(x,y\right)\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_j\left(x,y\right),$$

де

$$S\left(x,y\right)=e^{\frac{1}{2}\left(x-y,\vec{v}\right)},$$

$$\Delta_j\left(x,y\right)=\left(\frac{v_0}{\tilde{v}_0}\right)^{2j}\left[\Psi_j\left(\tilde{v}_0,|x-y|\right)-\Psi_{j-1}\left(\vec{v}_0,|x-y|\right)\right].$$

Для модифікованих функцій Бесселя K_0 і K_1 виконуються такі співвідношення [1]:

$$K_0\left(x\right)=-\ln\frac{x}{2}I_0\left(x\right)+P_0\left(x\right),$$

$$K_1\left(x\right)=\ln\frac{x}{2}I_1(x)+\frac{1}{x}I_0\left(x\right)+P_1\left(x\right),$$

де I_0, I_1 – функції Бесселя, P_0, P_1 – відомі степеневі ряди.

Тоді легко бачити, що

$$\Psi_n\left(k,r\right)=\Psi_n^{(1)}\left(k,r\right)\ln\frac{2}{kr}+\Psi_n^{(2)}\left(k,r\right),$$

де

$$\Psi_n^{(1)}\left(k,r\right)=I_0\left(kr\right)v_n\left(r\right)-I_1\left(kr\right)\omega_n\left(r\right),$$

$$\Psi_n^{(2)}\left(k,r\right)=\left(-\gamma I_0\left(kr\right)+P_0\left(kr\right)\right)v_n\left(r\right)+\left(\gamma I_1\left(kr\right)+P_1\left(kr\right)\right)\omega_n\left(r\right)+\alpha_n\left(k,r\right),$$

$$\alpha_n\left(k,r\right)=\frac{1}{kr}I_0\left(kr\right)\omega_n\left(r\right).$$

Оскільки $\omega_n(r) = a_2 r^2 + \ldots + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} r^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ (див. [5]), то функції α_n і α_n' не мають особливостей при $r \to 0$, а тому $\Psi_n^{(1)}$, $\Psi_n^{(2)}$ також є гладкими при $r = 0$.

Звідси випливає, що

$$\Delta_n(x,y) = \Delta_n^{(1)}(x,y) \ln \frac{2}{\tilde{v}_0 |x-y|} + \Delta_n^{(2)}(x,y),$$

де

$$\Delta_J^{(1)}(x,y) = \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_0}\right)^{2j} \left[\Psi_j^{(1)}\left(\tilde{v}_0, |x-y|\right) - \Psi_{j-1}^{(1)}\left(\tilde{v}_0, |x-y|\right)\right],$$

$$\Delta_J^{(2)}(x,y) = \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_0}\right)^{2j} \left[\Psi_j^{(2)}\left(\tilde{v}_0, |x-y|\right) - \Psi_{j-1}^{(2)}\left(\tilde{v}_0, |x-y|\right)\right],$$

причому функції $\Delta_j^{(i)}(x,y)$, $\mathrm{i} = 1,2$ не мають особливостей при $y \to x$.

Тоді функції $\Phi_j^{(i)}$, $\mathrm{i} = 1,2$ мають такий вигляд

$$\Phi_n^{(i)}(x,y) = -S(x,y) \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j^{(i)}(x,y), i = 1,2. \tag{12}$$

У випадку апроксимації з другим порядком фундаментальні розв'язки відповідної послідовності задач (9) - (5) – (6) можна отримати аналогічним способом.

Наявність фундаментальних розв'язків дає змогу ввести потенціали простого та подвійного шару і редукувати граничні стаціонарні задачі до граничних інтегральних рівнянь.

4. ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХНЯ ДИСКРЕТИЗАЦІЯ

Означення 2. Функції

$$U_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n} \int_{\partial\Omega} q_m(y) \Phi_{n-m+1}(x,y) ds(y), \ x \in \Omega, \tag{13}$$

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \tilde{q}_m(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi_{n-m+1}(x,y) ds(y), \ x \in \Omega, \tag{14}$$

де $q_n, \tilde{q}_n \in C(\partial\Omega)$, $n = 1, \ldots, N$, будемо називати потенціалами простого та подвійного шару для послідовності задач (4) - (6), відповідно.

Оскільки згідно з теоремою 1 фундаментальні розв'язки Φ_n мають логарифмічні особливості, то потенціали (13) і (14) мають властивості аналогічні до потенціалів для рівняння Лапласа. Тому не важко довести таке твердження.

Теорема 3. Потенціали простого шару U_n є розв'язками послідовності граничних задач (4) - (6), якщо їхні густини визначені з послідовності інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} q_n(y) \Phi_1(x,y) ds(y) = f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} q_m(y) \Phi_{n-m+1}(x,y) ds(y), x \in \partial\Omega. \tag{15}$$

Потенціали подвійного шару V_n є розв'язками послідовності граничних задач (4) - (6), якщо їхні густини визначені з послідовності інтегральних рівнянь другого роду

$$-\frac{1}{2}\tilde{q}_n(x)+\int_{\partial\Omega}\tilde{q}_n(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_1(x,y)\,ds(y)=$$

$$=f_n(x)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\tilde{q}_m(x)-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n-1}\int_{\partial\Omega}\tilde{q}_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m+1}(x,y)\,ds(y),\ x\in\partial\Omega. \qquad (16)$$

Надалі займемось дослідженням та чисельним розв'язуванням послідовності інтегральних рівнянь першого роду (15). Нехай границя $\partial\Omega$ задана параметрично:

$$\partial\Omega=\left\{x(s)=\left(x_1(s),x_2(s)\right),s\in[0;2\pi]\right\}.$$

Після параметризації в (15) отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_n(\sigma)H_1(s,\sigma)\,d\sigma=g_n(s)-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{2\pi}\mu_m(\sigma)H_{n-m+1}(s,\sigma)\,d\sigma,\ s\in[0;2\pi];$$

де $\mu_n(s)=q_n(x(s))\left|x'(s)\right|$, $s\in[0;2\pi]$, $H_n(s,\sigma)=\Phi_n\left(x(s),x(\sigma)\right)$, $s,\sigma\in[0;2\pi]$; $g_n(s)=f_n(x(s))$, $s\in[0;2\pi]$, $n=1,...,N$.

З теореми 1 випливає, що ядра $H_i(s,\sigma)$, $i=1,...,N$ мають логарифмічну особливість при $\sigma\to s$, і після нескладних перетворень їх можна записати у вигляді

$$H_i(s,\sigma)=H_i^{(1)}(s,\sigma)\ln\left[\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right]+H_i^{(2)}(s,\sigma),$$

де

$$H_i^{(1)}(s,\sigma)=-\frac{1}{2}\Phi_i^{(1)}\left(x(s),x(\sigma)\right),$$

$$H_i^{(2)}(s,\sigma)=\frac{1}{2}\Phi_i^{(1)}\left(x(s),x(\sigma)\right)\ln\left[\frac{16}{\tilde{v}_0^2e}\frac{\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{\left|x(s)-x(\sigma)^2\right|}\right]+\Phi_i^{(2)}\left(x(s),x(\sigma)\right),$$

причому

$$H_i^{(1)}(s,s)=-\frac{1}{2}\Phi_i^{(1)}\left(x(s),x(s)\right),$$

$$H_i^{(2)}(s,s)=\frac{1}{2}\Phi_i^{(1)}\left(x(s),x(s)\right)\ln\frac{4}{\tilde{v}_0^2e\left|x'(s)\right|^2}+\Phi_i^{(2)}\left(x(s),x(s)\right).$$

Отже, ми отримали послідовність інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_n(\sigma)\left[H_1^{(1)}(s,\sigma)\ln\left[\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right]+H_1^{(2)}(s,\sigma)\right]d\sigma=G_n(s), \qquad (17)$$

з рекурентними правими частинами

$$G_n(s)=g_n(s)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{2\pi}\mu_m(\sigma)\left[H_{n-m+1}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left[\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right]+H_{n-m+1}^{(2)}(s,\sigma)\right]d\sigma. \qquad (18)$$

За допомогою теорії Рісса - Шаудера про коректність операторних рівнянь другого роду з компактним оператором легко довести таке твердження про розв'язність інтегральних рівнянь (17) у просторах Гьольдера.

Теорема 4. Для $g_n \in C^{m+1,\alpha}[0\ ;\ 2\pi]$, $0<\alpha\le 1$, $\partial\Omega \in C^{m+1}$, $m=0,1,\ldots$ послідовність інтегральних рівнянь (17), (18) має єдиний розв'язок $\mu_n \in C^{m,\alpha}[0\ ;\ 2\pi]$.

Чисельне розв'язування послідовності інтегральних рівнянь (17), (18) виконаємо методом квадратур [6], [7]. Нехай $s_i = \dfrac{i\pi}{M}$, $i=0,\ldots,2M-1$, $M\in \mathrm{N}$, тоді виконуються такі наступні квадратурні формули, побудовані за допомогою тригонометричного інтерполювання [8]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left[\frac{4}{e}\sin^2\frac{s_i-\sigma}{2}\right]d\sigma \approx \sum_{k=0}^{2M-1} f(s_k)R_{|i-k|};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\,d\sigma \approx \frac{1}{2M}\sum_{k=0}^{2M-1} f(s_k),$$

де

$$R_k = -\frac{1}{2M}\left[1+2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos(ms_k)+\frac{(-1)^k}{M}\right].$$

Використаємо наведені квадратурні формули для відповідних інтегралів у (17) і застосуємо метод колокації з вузлами s_i, тоді отримаємо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{2M-1}\tilde{\mu}_n(s_k)\left[H_1^{(1)}(s_i,s_k)R_{|k-i|}+\frac{1}{2M}H_1^{(2)}(s_i,s_k)\right]=G_n(s_i),\ i=0,\ldots,2M-1 \qquad (19)$$

з однаковою матрицею і рекурентними правими частинами

$$G_n(s_i)=g_n(s_i)-\sum_{m-1}^{n-1}\sum_{k=0}^{2M-1}\tilde{\mu}_m(s_k)\left[H_{n-m+1}(s_i,s_k)R_{|k-i|}+\frac{1}{2M}H_{n-m+1}^{(2)}(s_i,s_k)\right].$$

Аналіз збіжності та оцінку похибки цього методу можна виконати на підставі теорії колективно компактних операторів або деяких оцінок тригонометричної інтерполяції у просторах Гьольдера [8]. Кожен з цих способів приводить до такого результату.

Теорема 5. Для $g_n \in C^{l+1,\beta}[0,2\pi]$ і достатньо великого M системи (19) мають єдині розв'язки. Для $\tilde{\mu}_n \in T_M$ і μ_n з (17) виконується оцінка похибки

$$\left\|\tilde{\mu}_n-\mu_n\right\|_{m,\alpha}\le C_n\frac{\ln M}{M^{l-m+\beta-\alpha}}\left\|\mu_n\right\|_{l,\beta}$$

для $0\le m\le l, 0<\alpha\le\beta\le 1$ *і сталих , залежних від* α,β,m,l.

Наближений розв'язок вихідної задачі конвекції - дифузії (1)-(3) обчислимо за формулою $u(x,t_n) \approx (1/2M)\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{2M-1}\tilde{\mu}_m(s_k)\Phi_{n-m+1}(x,\ x(s_k))$.

5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Приклад 1. У цьому прикладі порівняємо результати, отримані методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР) та методом скінченних елементів (МСЕ) (для розрахунків використано пакет FEMLAB 2.2) для випадку $n = 0$ у послідовності (4) - (6). Параметр дискретизації у методі ГІР виберемо M = 32, у МСЕ використаємо кусково-лінійні апроксимації Лагранжа, кількість вузлів – 335, кількість елементів – 620.

Також $\vec{v} = (1,1)$, $f = 1$, $\partial\Omega = \{x(s) = (\cos(s), \sin(s)), s \in [0; 2\pi]\}$. Результати чисельних експериментів наведено у табл. 1.

Таблиця 1.

Порівняння методів ГІР і МСЕ

	МГІР	МСЕ
$\bar{x} = (0\ ;\ 0)$	0,70838	0,70834
$\bar{x} = (0{,}9\ ;\ 0)$	0,94046	0,94052
$\bar{x} = (0{,}5\ ;\ 0{,}5)$	0,84756	0,84751
$\bar{x} = (0{,}3\ ;\ 0{,}2)$	0,74334	0,74336

Приклад 2. Розглянемо послідовність граничних задач (4) - (6) з граничними функціями

$$f_n(x) = \Phi_n(x, \tilde{y}),\ x \in \partial\Omega,\ \tilde{y} \notin \Omega.$$

Очевидно, що в цьому випадку точний розв'язок послідовності має вигляд

$$u_n(x) = \Phi_n(x, \tilde{y}),\ x \in \Omega.$$

Нехай $\partial\Omega = \{x(s) = (0{,}2\cos(s);\ 0{,}4\sin(s) - 0{,}3\sin^2(s)), s \in [0; 2\pi]\}$, $\vec{v} = (5;5)$, $x = (0;0)$, $y = (1;1)$. Абсолютні значення похибок $|u_n(x) - \tilde{u}_n(x)|$ для різної кількості вузлів квадратурної формули наведено у табл. 2

Таблиця 2.

Абсолютна похибка

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$
$M = 8$	$3{,}65 \cdot 10^{-5}$	$2{,}00 \cdot 10^{-4}$	$2{,}40 \cdot 10^{-4}$
$M = 16$	$7{,}85 \cdot 10^{-8}$	$3{,}95 \cdot 10^{-7}$	$4{,}68 \cdot 10^{-7}$
$M = 32$	$4{,}92 \cdot 10^{-13}$	$1{,}35 \cdot 10^{-11}$	$7{,}48 \cdot 10^{-11}$

Отже, тестові приклади 1 і 2 підтверджують достовірність розроблених методів та отримані теоретичні оцінки їхньої збіжності.

Приклад 3. Розглянемо нестаціонарна задачу (1) – (3) за таких вхідних даних : $T=1$, $\vec{v}=(5,\ 0)$,

$f(x,\ t)=(x_1\ +x_2)(1-\cos(4\pi\ t))$,

$\partial\Omega=\left\{x(s)=\left(0,2\cos(s);\ \ 0,4\sin(s)-0,3\sin^2(s)\right), s\in[0;2\pi]\right\}$.

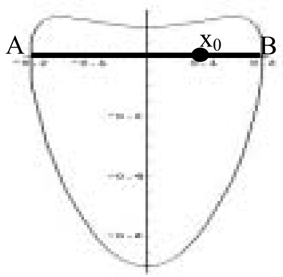
У табл.. 3 наведено наближені значення $\tilde{u}(x,t)$ в точці $x_0=(0,1\ ;\ 0)$ в різні моменти часу та для різних значень параметра М.

Таблиця 3.

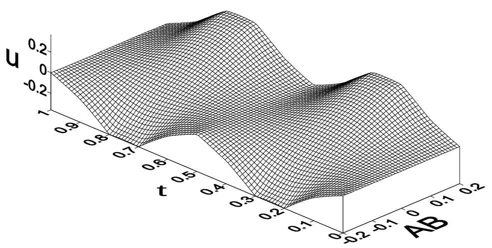
Чисельні результати

t	M	$O(\tau)$			$O(\tau^2)$		
		$\tau=0,2$	$\tau=0,1$	$\tau=0,05$	$\tau=0,2$	$\tau=0,1$	$\tau=0,05$
0,2	32	0.24770	0.24418	0.24245	0.24564	0.24294	0.24245
	64	0.24399	0.24312	0.24264	0.24350	0.24275	0.24263
0,4	32	0.09777	0.09881	0.09915	0.09779	0.09895	0.09914
	64	0.09652	0.09858	0.09912	0.09701	0.09901	0.09912
0,6	32	0.09577	0.09330	0.09274	0.09432	0.09304	0.09275
	64	0.09442	0.09283	0.09277	0.09356	0.09275	0.09273

На рисунку показано вигляд наближеного розв'язку $\tilde{u}(x,t)$ вздовж відрізка АВ на проміжку часу $(0;\ \ T]$.



Область Ω



$\tilde{u}(x,t)$

6. ВИСНОВКИ

Отже, розглянуто чисельне розв'язування першої початково-крайової задачі для рівняння конвекції - дифузії на площині. Застосування методу Роте за часовою змінною дало змогу звести цю задачу до послідовності стаціонарних граничних задач. Далі за допомогою подання розв'язків в інтегральному вигляді одержано послідовність інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрах. Визначено коректність цих інтегральних рівнянь та виконано їхню повну дискретизацію методом квадратур з використанням тригонометричних інтерполяційних квадратурних формул. Чисельні експерименти підтверджують ефективність пропонованих методів. Надалі становить інтерес дослідження повної похибки методу, перенесення його на випадок неоднорідного рівняння та адаптація на сингулярно-збурений випадок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
2. *Іванишин О.*, *Хапко Р.* Про чисельне розв'язування однієї задачі нестаціонарної теплопровідності у двозв'язній області // Вісн. Львів. ун-ту.Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 6. С. 46-56.
3. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. Минск: Наука и техника, 1986.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н* .Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал, 1999.
6. *Хапко Р.С.* Про методи Роте та інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування другої початково-крайової задачі для телеграфного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50. С. 203-209.
7. *Chapko R.* On the combination of Rothe's method and boundary integral equations for the nonstationary Stokes equation // J. of Integral Equations and Appl. 2001. Vol. 13. P 99-116.
8. *Chapko R., Kress R.* Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations // J. of Integral Equations and Appl. 1997. Vol. 9. P. 47-69.
9. *Kress R.* Linear Integral Equations : 2nd. ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.
10. *Penzel F.* A boundary integral method applied to a conversion – diffusion problem // J. Comput. Appl. Math. 1999. Vol. 111. P. 217-226.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE NON-STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION PROBLEM BY INTEGRAL EQUATIONS METHOD

S.Lavryk, R.Chapko

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: chapko@franko.lviv.ua

The combination of Rothe's method and boundary integral equation method for non-stationary convection-diffusion problem is applied. As result the initial boundary value problem is reduced to the recurrent sequence of integral equation with logarithmic singularity. The full discretization is realized by quadrature method with trigonometrical quadrature rules. The numerical results are presented.

Key words: non-stationary convection-diffusion problem, Rothe's method, boundary integral equations, quadrature method

Стаття надійшла до редколегії 11.03.2004
Прийнята до друку 15.09.2004