

УДК 519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ГІДРОАКУСТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙ РАВ'ЯРА-ТОМА

В. Горлач, А. Шинкаренко

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

Розглянуто числове розв'язування задач гідроакустики з використанням невідомих переміщень та методу скінченних елементів. Сформульовано задачу гідроакустики у переміщеннях та, відповідно їй, варіаційну задачу, побудовано апроксимації Рав'яра-Тома на трикутних скінченних елементах, перевірено запропонований числовий підхід на низці задач.

Ключові слова: гідроакустика, метод скінченних елементів, апроксимації Рав'яра-Тома.

1. ВСТУП

Формулювання задач гідроакустики в термінах невідомих переміщень давно відомі [5], однак мало поширені у практиці інженерних досліджень з огляду на певні вади (зокрема, для ідеальної рідини проблема забезпечення виконання умов потенціальності руху рідини $\text{rot } u=0$), які можуть призводити до появи нефізичних збурень числових розв'язків [9].

Ми пропонуємо побудову математичної моделі на підставі акустичного наближення рівнянь Нав'є-Стокса, відшукування узагальненого розв'язку варіаційної задачі у просторі $H(\text{div}, \Omega)$ та апроксимації розв'язку за просторовими змінними на базі скінченно-елементних просторів апроксимацій Рав'яра-Тома [6].

2. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ГІДРОАКУСТИКИ

Нехай в'язка стислива рідина займає область Ω в евклідовому просторі R^d (в застосуваннях $d=1,2$ або 3), і Γ – межа цієї області. Надалі будемо припускати, що межа Γ є неперервною за Ліпшицем, іншими словами, майже в кожній точці $x=(x_1, \dots, x_d)$ межі Γ можна однозначно побудувати одиничний вектор зовнішньої нормалі $n(x)=(n_1(x), \dots, n_d(x))$, $n_i = \cos(n, x_i)$, $i=1, \dots, d$. Символом t будемо позначати момент часу з інтервалу $(0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Надалі нехтуватимемо температурними ефектами в рідині, припускаючи, що

- у стані спокою густину рідини описує відома функція $\rho = \rho(x)$;
- незбурена рідина перебуває у стані рівноваги, а її збурення характеризує вектор акустичних швидкостей $v = \{v_i(x)\}_{i=1}^d$;
- відхилення тиску від рівноважного визначене функцією $p = p(x, t)$.

Будемо вважати, що акустичні збурення в рідині спричинює навантаження частини Γ_σ поверхні Γ (задане вектором напружень $\hat{\sigma} = \left\{ \hat{\sigma}_i(x, t) \right\}_{i=1}^d$) та/або початкові значення вектора швидкості $v^0 = \{v_i^0(x)\}_{i=1}^d$ і тиску $p_0 = p_0(x)$ в області Ω .

Поширення акустичних хвиль у в'язкій стисливій рідині можна описати такою початково-крайовою задачею [1,4]:

Знайти вектор швидкостей $v = \{v_i(x, t)\}_{i=1}^d$ та тиск $p = p(x, t)$ такі, що задовольняють систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0, \\ \sigma_{ij}(v, p) = \left\{ -p + (\zeta - 2/3\eta) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}(v), \\ e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{array} \right. \quad (1)$$

а також крайові

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \text{ mes}(\Gamma_u) > 0, \Gamma_u \subset \Gamma, \\ \sigma_{ij} n_i = \hat{\sigma}_i \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \end{array} \right. \quad (2)$$

та початкові умови

$$v|_{t=0} = v^0, p|_{t=0} = p_0 \quad \text{в } \Omega \quad (3)$$

Тут $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$ і $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^d$ – симетричні тензори напружень та швидкостей деформацій, ζ і η – коефіцієнти об'ємної та зсувної в'язкості, δ_{ij} – символ Кронеккера.

Тут і надалі, де спеціально не наголошено, за індексами, що повторюються, передбачене підсумовування від 1 до d .

Скалярний добуток у просторі R^d будемо позначати так:

$$a \cdot b = a_i b_i \quad \forall a, b \in R^d.$$

За відсутності зсувної в'язкості ($\eta \equiv 0$) задача акустики спрощується так:

- друге з рівнянь системи (1) набуває вигляду

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p - \nabla \{ \zeta \nabla \cdot v \} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (4)$$

який відображає структуру доданків з похідними другого порядку від швидкостей за просторовими змінними;

- крайова умова на напруження із (2) набуває вигляду

$$\{ -p + \zeta \nabla \cdot v \} n_i = \hat{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times (0, T]; \quad (5)$$

- перше із рівнянь системи (1) та рівняння (4) містять лише дивергенцію вектора швидкості та її похідні; тому із крайових умов на швидкість необхідно залишається лише умова

$$v \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma_u \times (0, T]. \quad (6)$$

Із початково-крайовою задачею (1)–(3) інтегруванням у часі знаходимо, що

$$p(x,t) = p_0(x) - \rho c^2 \int_0^t \nabla \cdot v \, dt \quad \forall x \in \Omega. \quad (7)$$

Підстановка (7) у (4) приводить рівняння (4) до вигляду

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left\{ p_0 - \rho c^2 \int_0^t \nabla \cdot v \, dt - \xi \nabla \cdot v \right\} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T]$$

або (оскільки p_0 задана функція в Ω)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left\{ -\rho c^2 \int_0^t \nabla \cdot v \, dt - \xi \nabla \cdot v \right\} = -\nabla p_0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (8)$$

Тепер, якщо ми введемо вектор переміщень рідини згідно з правилом

$$v(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t} \quad \text{в } \bar{\Omega} \times (0, T] \quad \text{або} \quad u(x,t) := u^0(x) + \int_0^t v(x,t) \, dt,$$

то рівняння (8) набуде вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla \left\{ -\rho c^2 \nabla \cdot (u) - \xi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot u \right\} = -\nabla p_0 - \nabla \left\{ \rho c^2 \nabla \cdot u^0 \right\} \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (9)$$

Подібно підстановка (7) в (5) приводить крайову умову до вигляду

$$\left\{ \rho c^2 \nabla \cdot u + \xi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot u \right\} n_i = \hat{\sigma}_i + p_0 n_i + \rho c^2 \nabla \cdot u^0 \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times (0, T] \quad (10)$$

Як бачимо, вираз (7) дає змогу повністю вилучити із розгляду тиск у задачах акустики рідини з об'ємною в'язкістю і сформулювати її лише у термінах акустичних переміщень рідини, причому вектор u буде знайдено з точністю до вектора u^0 , який ми надалі вважатимемо нульовим. Це, зокрема, приводить запис крайової умови (6) до стандартного вигляду

$$u \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma_u \times (0, T].$$

Отже, остаточно, отримаємо таку початково-крайову задачу гідроакустики в термінах переміщень рідини

$$(P) \begin{cases} \text{знайти } u = \{u_i(x,t)\}_{i=1}^d \text{ такий, що} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla \left\{ -\xi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot u - \rho c^2 \nabla \cdot u \right\} = -\nabla p_0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \\ n_i \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot u + \rho c^2 \nabla \cdot u \right\} = \hat{\sigma}_i + p_0 n_i \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times (0, T], \\ u \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma_u \times (0, T], \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v^0 \quad \text{в } \Omega. \end{cases}$$

Задача (P) і буде головним об'єктом нашого дослідження.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ГІДРОАКУСТИКИ

Уведемо такий простір допустимих функцій

$$V := \{w \in H(\text{div}; \Omega) \mid w \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma_u\},$$

де

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \left\{ w \in L^2(\Omega)^2 \mid \int_{\Omega} [w \cdot w + (\nabla \cdot w)^2] dx < +\infty \right\},$$

та форми і лінійний функціонал

$$m(u, v) := \int_{\Omega} \rho u \cdot v \, dx,$$

$$a(q; u, v) := \int_{\Omega} q (\nabla \cdot u) (\nabla \cdot v) \, dx, \quad \forall q \in L^2(\Omega),$$

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} p_0 \nabla \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma} \cdot w \, d\gamma, \quad \forall u, v \in V.$$

Застосуємо стандартний підхід [2] і сформулюємо варіаційну задачу гідроакустики рідини з об'ємною в'язкістю так:

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(t) \in V, t \in [0, T] \text{ такий, що} \\ m(u''(t), w) + a(\xi; u'(t), w) + a(\rho c^2; u(t), w) = \langle l(t), w \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ (u(0), w)_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = 0, \quad m(u'(0) - v^0, w) = 0 \quad \forall w \in V, \end{cases} \quad (11)$$

де

$$(q, r)_{H(\operatorname{div}; \Omega)} := \left(\int_{\Omega} [q \cdot r + (\nabla \cdot q)(\nabla \cdot r)] dx \right)^{1/2}$$

скалярний добуток у $H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Підставимо в задачу (11) $w = u'(t)$, тоді

$$\begin{aligned} m(u''(t), u'(t)) + a(\xi; u'(t), u'(t)) + a(\rho c^2; u(t), u'(t)) = \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ m(u', u') + a(\rho c^2; u(t), u(t)) \} + a(\xi; u'(t), u'(t)) = \langle l(t), u'(t) \rangle \end{aligned}$$

або

$$\frac{d}{dt} (K + \Pi) + I = \langle l(t), u'(t) \rangle,$$

де

$$K = \frac{1}{2} m(u'(t), u'(t)), \quad \Pi = \frac{1}{2} a(\rho c^2; u(t), u(t)), \quad I = a(\xi; u'(t), u'(t)).$$

Неважко переконатися, що K і Π є, відповідно, кінетичною і потенціальною енергією системи, отриманою внаслідок її збурення. Справді,

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (u'(t))^2 \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v^2(t) \, dx; \\ \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho c^2 (\nabla \cdot u(t))^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} (-\rho c^2 \nabla \cdot u(t))^2 \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2\rho c^2} (p)^2 \, dx. \end{cases}$$

Тоді I можна вважати дисипацією енергії в системі, оскільки в правій частині міститься енергія, надана системі (початковою енергією та зовнішніми силами).

Отриманий таким чином закон збереження енергії гарантує єдиність розв'язку задачі (11) та його неперервну залежність від вихідних даних [2].

4. СХЕМА ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Напівдискретизація Гальоркіна за просторовими змінними. З використанням стандартної процедури напівдискретизації Гальоркіна виберемо підпоследовність скінченновимірних просторів V_h із простору допустимих векторів V таких, що

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim V_h = N(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty, \\ \bigcup_{h>0} V_h \text{ щільне в } V. \end{array} \right.$$

Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $u^h(t) \in V_h$ задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти } u^h(t) \in V_h, t \in [0, T] \text{ такий, що} \\ m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^h(t), w\right) + a\left(\xi; \frac{\partial}{\partial t} u^h(t), w\right) + a(\rho c^2; u^h(t), w) = \langle l(t), w \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ (u^h(0), w)_{H(\text{div}; \Omega)} = 0, \quad m\left(\frac{\partial}{\partial t} u^h(0) - v^0, w\right) = 0, \quad \forall w \in V_h \end{array} \right. \quad (12)$$

однозначно можна записати у вигляді

$$u^h(t) = \sum_{i=1}^{N(h)} U_i(t) w^i(x), \quad (13)$$

де $\{w^i\}_{i=1}^{N(h)}$ – певний базис простору V_h , і невідомими є скалярні функції $U_1(t), \dots, U_{N(h)}(t)$. Для їхнього відшукування підставимо розклад (13) у (12), і послідовно прийемо $w = w^j$, $j = 1, \dots, N(h)$. У результаті отримаємо задачу Коші для системи з $N(h)$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти вектор } U(t) \text{ такий, що} \\ MU''(t) + A(\xi)U'(t) + A(\rho c^2)U(t) = L(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ MU'(0) = V^0, \quad GU(0) = 0, \end{array} \right. \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} G &= \{g_{ij}\}, \quad g_{ij} = (w^i, w^j)_{H(\text{div}; \Omega)}; \\ M &= \{m_{ij}\}, \quad m_{ij} = m(w^i, w^j); \\ A(\theta) &= \{a_{ij}(\theta)\}, \quad a_{ij}(\theta) = a(\theta; w^i, w^j); \\ L(t) &= \{l_j(t)\}, \quad l_j = \langle l(t), w^j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, N(h). \end{aligned}$$

Оскільки матриця M симетрична і додатно визначена, то задача Коші (14) має єдиний розв'язок $U(t)$, який, відповідно, однозначно визначає напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $u^h(t)$ у вигляді (13) для всіх $h > 0$.

Апроксимації Рав'яра–Тома на трикутних елементах. Розглянемо трикутник K . Позначимо P_m простір поліномів степеня не більше m ; S_m – простір усіх функцій визначених на межі K , проекція яких на довільну сторону трикутника є поліномом степеня не більше m , n – зовнішня нормаль до ∂K .

Уведемо простір Q_m за таким правилом –

$$Q_m = \{q \in H(\text{div}; K) \mid \nabla \cdot q \in P_m \text{ і } q \cdot n \in S_m\}.$$

Бреці та Фортін [3] запропонували низку принципів побудови апроксимацій для заданого простору. Ми пропонуємо використати апроксимації Рав'яра–Тома [7,8], побудову яких коротко описано нижче.

Розіб'ємо нашу область Ω на трикутні скінченні елементи K_j з певним характерним розміром h . Нехай координати вершин (x_i, y_i) , а сторона між вершинами i, j має довжину l_{ij} .

За методикою Рав'яра–Тома [6] введемо простір Q_0 на довільному трикутнику K з вершинами i, j, k . Зазначимо, що $\dim Q_0 = 3$, і довільна функція з цього простору однозначно визначена своїми нормальними складовими у серединах сторін трикутника. Базисна функція w^i (яка приписана до середини сторони l_{jk}) матиме такий вигляд:

$$w^i = \frac{p_i}{2|K|} l_{jk} \begin{bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де p_i – коефіцієнт, який відповідає за напрям нормалі (-1 або 1). Функції w^i, w^k отримують із (15) циклічною перестановкою i, j, k . Зазначимо, що одна базисна функція відповідає одній стороні і є визначеною на двох сусідніх скінченних елементах, однак зовнішня нормаль для одного з трикутників є внутрішньою для іншого. Власне для узгодження нормалей і введено коефіцієнт p_i .

За базис простору V_h візьмемо набір отриманих таким способом функцій w^i ($i = 1, \dots, N(h)$), де $N(h)$ – кількість сторін всіх трикутників.

Схема інтегрування у часі. Розіб'ємо проміжок $(0, T]$ на однакові відрізки довжини dt . Для інтегрування задачі Коші (14) в часі використовуємо однокрокову рекурентну схему [2]

$$\begin{cases} \text{задано } dt, \beta, \gamma = \text{const} > 0, (U^i, V^i) \in (R^{N(h)})^2 \\ \text{знайти пару } (U^{i+1}, V^{i+1}) \in (R^{N(h)})^2 \text{ таку, що} \\ \left\{ \begin{aligned} M + dt\gamma A(\xi) + dt^2 \beta A(\rho c^2)/2 \} V^{i+\gamma} &= dt\gamma \{ L(i+1/2)dt - A(\rho c^2)U^i \} + \\ &+ \{ M + dt^2(\beta - 2\gamma^2)A(\rho c^2) \} V^i, \\ V^{i+1} &= V^i + [V^{i+\gamma} - V^i]/\gamma, \\ U^{i+1} &= U^i + [V^{i+1} + V^i]dt/2, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (16)$$

Тут U^i, V^i – розклади, відповідно, $u_h(i\Delta t)$ та $u'_h(i\Delta t)$ за базисом $\{w^k\}$.

Для того, щоб схема була абсолютно стійкою за часом, достатньо, щоб виконувалася умова $\beta \geq \gamma \geq 0.5$. Для збереження фізичного змісту процесу додатково необхідно враховувати умову Куранта.

5. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТЕСТОВИХ ТА МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ

Тестова задача з аналітичним розв'язком. Для написання програми використано середовище MS Visual Studio 6.0 та бібліотеку LAPACK. Розроблене програмне забезпечення генерує сітку для прямокутної області, розв'язує задачу для певної триангуляції і видає файли – розв'язок. Роботу програми та усієї запропонованої методики перевірено на такому тестовому прикладі з аналітичним розв'язком.

Нехай $\Omega = [0, 0.1] \times [0, 0.5]$; $\beta = \gamma = 0.5$; $T = 0.2$; $\Delta t = 0.001$, рідина має такі параметри $\rho = 1$, $c = 1$, $\xi = 0$.

Приймемо початкові та крайові умови такі:

$$u^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(5\pi y) \end{bmatrix}, \quad v^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\pi y) \end{bmatrix},$$

$$u \cdot n = 0 \text{ на } \Gamma_n, \quad \hat{\sigma} = 0 \text{ на } \Gamma_u,$$

де $\Gamma_u = \{(x, y) \in \Omega \mid y = 0.5\}$ і $\Gamma_n = \Gamma \setminus \Gamma_u$.

Така задача є одновимірною, і її аналітичний розв'язок записуємо так:

$$\bar{u}(y, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(5\pi ct) \sin(5\pi y) + \frac{1}{c\pi} \sin(\pi ct) \sin(\pi y) \end{bmatrix}.$$

Для перевірки числових результатів на сітці 10×50 визначено повну енергію системи за такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(MV^i, V^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(V_j^i w^j \cdot V_j^i w^j) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v_h^2(t_i) d\Omega = K_h(t_i) \rightarrow K(t_i) \\ \frac{1}{2}(A(\rho c^2)U^i, U^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho c^2 (U_j^i \nabla \cdot w^j)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} (-\rho c^2 \nabla \cdot u_h(t_i))^2 d\Omega = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{p_h^2(t_i)}{\rho c^2} d\Omega = \Pi_h(t_i) \rightarrow \Pi(t_i) \end{cases}$$

У табл. 1 наведено результати порівняння числового та аналітичного розв'язків.

Таблиця 1.

Значення енергій числового (h) та аналітичного розв'язків

t_i с	$K_h(t_i)$	$\Pi_h(t_i)$	$E_h(t_i)$	$K(t_i)$	$\Pi(t_i)$	$E(t_i)$
0.01	0.1036	2.9915	3.0951	0.0880	3.0087	3.0967
0.05	1.6011	1.4940	3.0951	1.5541	1.5425	3.0966
0.09	3.0322	0.0629	3.0951	3.0200	0.0765	3.0965
0.13	2.4197	0.6753	3.0951	2.4591	0.6375	3.0965

Обчислено відносні похибки для переміщень і швидкостей, а також норми аналітичного та числового розв'язків за формулами

$$E_i(u) = \frac{\|u_h(t_i) - u(t_i)\|_{H(\text{div}, \Omega)}}{\|u(t_i)\|_{H(\text{div}, \Omega)}}, \quad E_i(v) = \frac{\|v_h(t_i) - v(t_i)\|_{H(\text{div}, \Omega)}}{\|v(t_i)\|_{H(\text{div}, \Omega)}},$$

$$\|w\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \sqrt{(w, w)_{H(\text{div}, \Omega)}}; \quad \forall w \in H(\text{div}, \Omega).$$

У табл. 2 наведено відносні похибки та норми обох розв'язків.

Таблиця 2.

Норми та відносні похибки (E) числового розв'язку

t_i с	$E_i(u)$ %	$E_i(v)$ %	$\ u(t_i)\ $	$\ v(t_i)\ $	$\ u_h(t_i)\ $	$\ v_h(t_i)\ $
0.01	3.7102	9.8484	0.1562	0.4194	0.1557	0.4549
0.05	3.9977	4.0757	0.1121	1.7630	0.1103	1.7887
0.09	8.9662	3.6692	0.0284	2.4577	0.0265	2.4617
0.13	4.5842	3.7611	0.0745	2.2177	0.0765	2.1991

Порядок збіжності за просторовими координатами на сітках №1: 5×30 ($\Delta t c = 0.1h$), №2: 10×60 ($\Delta t c = 0.2h$), №3: 20×120 ($\Delta t c = 0.4h$) становив 2.33, а порядок збіжності за часом при №1: $\Delta t c = 0.4h$, №2: $\Delta t c = 0.2h$, №3: $\Delta t c = 0.1h$ (сітка 8×40 елементів, $\beta = 0.6$, $\gamma = 0.5$) – 2.32, що добре узгоджується із теоретично очікуваними результатами і підтверджує коректність запропонованої числової схеми.

Модельний приклад. Нехай $\Omega = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$. Рідина – ідеальна вода ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$, $\zeta = 0 \text{ Па/с}$). Початкові умови: $u^0 = 0$, $v^0 = 0$. Навантаження задане кусково-сталого функцією на частині верхньої сторони прямокутника (рис. 1, $T_n = 2T/3$).

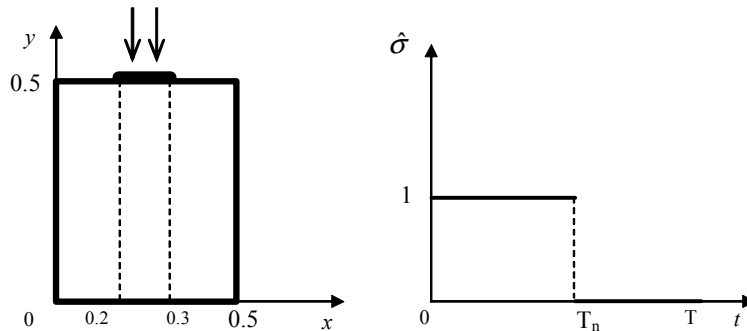


Рис. 1. Геометрія області та функція навантаження.

Час T відповідає часу проходження звуковою хвилею усієї області Ω ($T = 0.5/c$). За крок Δt звукова хвиля проходила третину елемента ($\Delta t = h/(3c)$), що забезпечує виконання умови Куранта. Параметри схеми інтегрування за часом приймали такими: $\beta = \gamma = 0.5$. Розрахунок виконували на сітці 40×40 елементів.

На рис. 2 показано отримані поверхні тиску у i -ті моменти часу ($i \cdot T/25$).

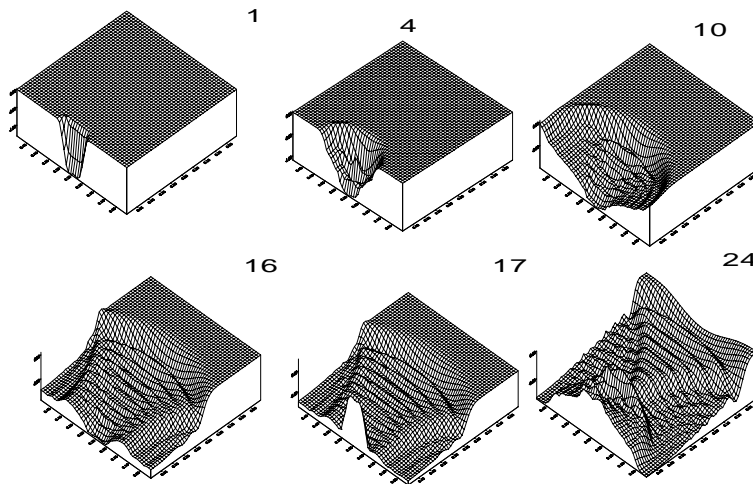


Рис. 2. Поширення хвилі тиску в ідеальній рідині

Урахування реальної в'язкості води ($\zeta=10^{-3}$ Па/с) не зумовлює значної зміни результатів, оскільки співвідношення коефіцієнтів при дивергенції швидкості і дивергенції переміщень становить близько десяти порядків ($\zeta/(\rho c^2 T) \sim 10^{-9}$). Завищені ж в'язкості (наприклад, $\zeta=10^3$ Па/с) призводять до штучного "вигладжування" розв'язку (рис. 3).

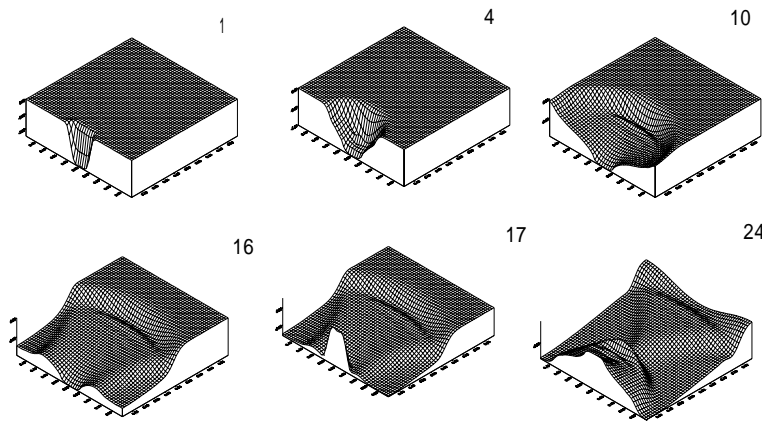


Рис. 3. Поширення хвилі тиску у в'язкій рідині.

6. ВИСНОВКИ

Отже, запропонована математична модель для задач гідроакустики у термінах невідомих переміщень та числова схема її розв'язування з використанням апроксимацій Рав'яра–Тома на трикутних скінченних елементах є коректною, позбавленою традиційних вад формулювань задач гідроакустики в термінах переміщень та дає змогу виконувати кваліфікований обчислювальний експеримент для широкого класу інженерних застосувань.

Автори висловлюють подяку Я.Кондратиюку за поради та увагу до роботи.

Робота частково підтримана держбюджетними темами № ДР 0100U001426 та № ДР 0103U001926.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
2. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – К.: УМК ВО, 1991. – 90 с.
3. Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1991. – 350 p.
4. Ihlenburg F. Finite Elements Analysis of Acoustic Scattering. – Berlin: Springer Verlag, 1998. – 224 p.
5. Olson L.G., Bathe K.J. A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems // Nucl. Eng. Des. – 1983. – Vol.76. – P. 137-151.

6. *Raviart P.A., Thomas J.M.* A mixed finite element method for second order elliptic problems // *Lectures Notes on Math.* – 1977. – Vol.606. – P. 292-315.
7. *Shynkarenko A.G., Horlatch V.M.* Raviart–Thomas approximations for variational hydroacoustics problem // *Mathematical Modelling and Analysis (Abstracts of Conference MMA-2003, Vilnius, Lithuania)* . – VTU, 2003. – P. 65.
8. *Shynkarenko A., Horlatch V.* Raviart–Thomas approximations for variational hydroacoustics problems // *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003 (Proceedings of The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyvaskyla, Finland)*. – Springer Verlag, 2003. – P. 541-546.
9. *Stucky P., Lord W.* Spurious modes in finite element models for ultrasonic waves in fluid-solid systems // *Review of progress in quantitative nondestructive evaluation.* – 1998. – Vol. 17. – P. 963-969.

RAVIART–THOMAS APPROXIMATIONS FOR THE ANALYSIS OF HYDROACOUSTICS PROBLEMS

V. Horlatch, A. Shynkarenko

*Ivan Franko National University of L'viv
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, E-mail: kis@franko.lviv.ua*

This paper is dedicated to numerical solution of hydroacoustics problems employing unknown displacements and finite element method. Hydroacoustics problem is formulated in terms of displacements, its variational formulation is presented, Raviart–Thomas approximations on triangular elements are constructed, and check of the introduced numerical approach is carried out on a number of problems.

Key words: hydroacoustics, finite element method, Raviart–Thomas approximations

Стаття надійшла до редколегії 08.04.2004

Прийнята до друку 15.09.2004