

УДК 531.8

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ У СИСТЕМАХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М. Щербатий, Я. Мацьонг

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: shcherb@franko.lviv.ua

Розглянуто задачі оптимального керування та ідентифікації параметрів систем (процесів), поведінку яких описує задача Коші для векторного звичайного диференціального рівняння. Шляхом апроксимації функцій керування кусково-поліноміальними функціями задачу оптимального керування зведено до задачі нелінійного математичного програмування. Її розв'язано методом зовнішніх штрафних функцій у поєднанні з методом спряжених градієнтів. Коефіцієнти чутливості функціональних характеристик системи відносно параметрів керування обчислено двома способами – за допомогою скінченних різниць і за допомогою спряжених рівнянь.

Наведено числові результати для задачі оптимізації випуску пеніциліну з використанням різних способів обчислення похідних та для задачі ідентифікації параметрів моделі спиртового бродіння у винному суслі.

Ключові слова: оптимальне керування, ідентифікація параметрів, спряжена функція, задача нелінійного програмування, спиртове бродіння, синтез пеніциліну.

1. ВСТУП

У мікробіології, біохімії, економіці, медицині часто виникають задачі оптимального керування динамічними процесами, поведінку яких описує задача Коші для векторного звичайного диференціального рівняння (ВЗДР). Під час побудови моделей реальних процесів природно виникають задачі ідентифікації параметрів моделей, тобто наповнення моделей реальною інформацією про об'єкт дослідження. Тому важливим є подальший розвиток алгоритмів та програмного забезпечення, призначеного для розв'язування такого класу задач.

2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Розглянемо деяку систему, поведінку якої моделює задача Коші для ВЗДР:

$$x'(t) = f(t, x, u, p), \quad t \in (t_0, t_e], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

де $x(t) = [x_1(t), \dots, x_r(t)]^T$ – задані неперервні векторні функції поведінки системи; $u(t) = [u_1(t), \dots, u_k(t)]^T$ – функції керування, які вибирають з певної множини керувань U ; $p \in R^L$ – набір параметрів, які характеризують модель; $f(\cdot)$ – неперервні векторні функції своїх аргументів, які задовольняють умови, що забезпечують існування та єдиність розв'язку нашої системи для будь-яких допустимих значень u та p . Задача (1)–(2) є математичною моделлю розглядуваної системи, яка за

© Щербатий М., Мацьонг Я., 2002

Робота виконана за часткової фінансової підтримки гранту INTAS 00-0751 (Food Call 2000).

заданих керувань u та параметрів p дає змогу визначити поведінку (стан) системи x .

З використанням функцій поведінки x та керування u обчислимо низку показників ефективності системи, поведінку якої моделює задача (1)–(2). Застосуємо показники, які обчислимо за допомогою функціоналів інтегрального та точкового типу:

$$\tilde{\varphi}_{1j}(u, x) = \int_{t_0}^{t_c} g_{1j}(t, x, u) dt; \quad j = 1, \dots, J_1, \quad J_1 \in N; \quad (3)$$

$$\tilde{\varphi}_{2j}(u, x) = g_{2j}(t_j, x(t_j), u(t_j)); \quad j = 1, \dots, J_2, \quad J_2 \in N, \quad (4)$$

де g_{1j}, g_{2j} – задані функції.

Один із функціоналів (3)–(4) вибираємо як критерій мети:

$$\varphi_0(u) = \tilde{\varphi}_{sq}(u, x), \quad s \in \{1, 2\}, \quad q \in \{1, \dots, J_s\}. \quad (5)$$

Інші в цей час можуть відігравати роль обмежень і утворюють множину допустимих керувань, яка складається з обмежень типу рівностей та нерівностей [3, 7]:

$$U_{\partial} = \{u : u \in U, \varphi_j(u) = 0; \quad j = \overline{1, m_1}, \quad \varphi_j(u) \leq 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}\}; \quad (6)$$

$$\varphi_j(u) = \tilde{\varphi}_{s\tilde{q}_1}(u, x) - \tilde{\varphi}_{s\tilde{q}_1}^+; \quad j = \overline{1, m}, \quad \tilde{s}_1 \in \{1, 2\}; \quad \tilde{q}_1 \in \{1, \dots, J_{\tilde{s}_1}\}; \quad (s, q) \neq (\tilde{s}_1, \tilde{q}_1),$$

де $\tilde{\varphi}_{s\tilde{q}_1}^+$ – допустиме значення відповідного функціонала.

Задача оптимального керування полягає в знаходженні функції керування $u_* \in U_{\partial}$ з умови

$$\varphi_0(u_*) = \inf_{u \in U_{\partial}} \varphi_0(u). \quad (7)$$

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Задачу (1)–(7) розв'яжемо шляхом її зведення до задачі нелінійного математичного програмування (ЗНМП). Для цього функцію керування $u(t) = [u_1(t), \dots, u_k(t)]^T$ із самого початку апроксимуємо кусково-поліноміальними функціями $u_i(t) = u_i(t, b^{(i)})$, $i = 1, \dots, k$, де $b^{(i)} = [b_1^{(i)}, \dots, b_{n_i}^{(i)}]^T$ – вектор вузлових значень невідомих функції керування u_i , які вибираються в ролі параметрів керування. Функції $u_i(t)$ виберемо у вигляді кусково-постійних або кусково-лінійних функцій. Позначимо через $b = [b^{(1)}, \dots, b^{(k)}]^T = [b_1, \dots, b_n]^T$ – вектор оптимізації, який складається з компонент векторів керування $b^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Тоді ЗНМП полягає в такому: знайти вектор оптимізації b^* , який надає мінімуму критерію мети $\varphi_0(b)$

$$\varphi_0(b^*) = \min_{b \in U_b} \varphi_0(b) \quad (8)$$

на множині допустимих значень:

$$U_b = \{b \in \tilde{U}, \varphi_j(b) = 0; \quad j = 1, \dots, m_1; \quad \varphi_j(b) \leq 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m\}; \quad (9)$$

$$\tilde{U} = \{b \in R^n, b : b_i^- \leq b_i \leq b_i^+, \quad i = 1, \dots, n\}. \quad (10)$$

Задачу (8) – (10) розв’яжемо методом зовнішніх штрафних функцій, зводячи її до послідовності задач оптимізації при простих обмеженнях (10). Для цього розглянемо розширену цільову функцію $P(b, \tau^{(l)})$, в якій до цільової функції $\varphi_0(b)$ додано штрафну функцію $S^{(l)}(b)$, побудовану з використанням обмежень типу рівностей та нерівностей [3]:

$$\begin{aligned} P(b, \tau^{(l)}) &= \varphi_0(b) + S^{(l)}(b) = \\ &= \varphi_0(b) + \sum_{j=1}^{m_1} \tau_j^{(l)} (\varphi_j(b))^2 + \sum_{j=m_1+1}^m \tau_j^{(l)} (\varphi_j(b) + |\varphi_j(b)|)^2, \\ \tau^{(l)} &= [\tau_1^{(l)}, \dots, \tau_m^{(l)}]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Числа $\tau_j^{(l)}, l = 0, 1, \dots$ утворюють монотонно зростаючі числові послідовності.

Послідовність ЗНМП (11) розв’яжемо методом спряжених градієнтів Флетчера – Пауела з різними варіантами проектування точок пошуку на множину простих обмежень \tilde{U} . Для обчислення градієнтів розширеної функції мети (11) використаємо як метод правосторонніх скінченних різниць, так і метод спряжених рівнянь [7]. У разі використання методу спряжених рівнянь основна складність полягає в обчисленні похідних $\frac{d\tilde{\varphi}_j}{db}$ від функціоналів інтегрального та точкового типів (3) – (4). Процедура обчислення цих похідних полягає в такому. З самого початку, в разі заданого набору параметрів керування b , розв’яжемо задачу Коші (1) – (2) і знайдемо функцію поведінки x . Далі для кожного функціонала інтегрального типу (3) розв’яжемо спряжену задачу Коші відносно спряженої функції $\mu_{1j}(t)$, починаючи від точки t_e до точки t_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{1j}}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \mu_{1j} - \left(\frac{\partial g_{1j}}{\partial x} \right)^T, \quad t \in [t_0, t_e), \quad j \in \{1, \dots, J_1\}, \\ \mu_{1j}(t_e) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Обчислимо повну похідну за формулою:

$$\frac{d\varphi_{1j}}{db} = \int_{t_0}^{t_e} \left(\mu_{1j}^T \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial u} \right) \frac{du}{db} dt, \quad j \in \{1, \dots, J_1\}. \quad (13)$$

У випадку функціонала точкового типу (4) потрібно розв’язати наведену нижче спряжену задачу Коші:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{2j}}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \mu_{2j}, \quad t \in [t_0, t_j), \quad j \in \{1, \dots, J_2\}; \\ \mu_{2j}(t_j) &= \left(\frac{\partial g_{2j}}{\partial x} \Big|_{t=t_j} \right)^T \end{aligned} \quad (14)$$

та виконати обчислення за формулою

$$\frac{d\varphi_{2j}}{db} = \left(\frac{\partial g_{2j}}{\partial u} \frac{du}{db} \right) \Big|_{t=t_j} + \int_{t_0}^{t_j} \left(\mu_{2j}^T \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{du}{db} dt, \quad j \in \{1, \dots, J_2\}. \quad (15)$$

Задачу Коші (1) – (2) та спряжені задачі Коші (12) і (14) розв’яжемо вкладеним методом Дормана – Принса з автоматичним вибором кроку інтегрування [8]. Цей метод є одним з найефективніших явних однокрокових методів розв’язування задач Коші для ВЗДР у випадку знаходження розв’язку із середньою точністю (локальна похибка апроксимації розв’язку на кожному кроці інтегрування дорівнює $10^{-6} - 10^{-9}$) [8, 9]. Крім того, цей метод дає змогу за допомогою відповідних аналітичних формул обчислювати розв’язок у довільній точці інтервалу $[t_0, t_e]$, що необхідно під час розв’язання спряжених рівнянь (12), (14) та обчислення похідних згідно з (13), (15).

У випадку використання методу спряжених рівнянь для знаходження похідних функцій $\frac{d\varphi_{ij}}{db}$ треба один раз розв’язувати спряжену систему рівнянь (12) або (14) для кожного із обмежень (3), (4). Застосування методу скінченних різниць для обчислення відповідних похідних потребує n додаткових розв’язувань задачі Коші (1) – (2) (n – кількість параметрів оптимізації). Крім того проблематичним є вибір приросту параметрів оптимізації Δ у методі скінченних різниць [3].

4. ЗАДАЧА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ

У випадку визначення характерних особливостей досліджуваного процесу, а не його загальностатистичних закономірностей, необхідно ідентифікувати параметри моделі (1) – (2), яка описує реальний процес. Задача ідентифікації полягає в знаходженні такого набору параметрів, щоб відхилення між експериментальними даними та отриманим розв’язком математичної моделі було достатньо малим (у сенсі певного кількісного критерію). Спосіб побудови функціонала відхилю і метод ідентифікації суттєво залежить від характеру доступної інформації. Якщо дані спостережень виявляють певну статистичну регулярність, то для визначення параметрів моделей треба використовувати статистичні методи оптимального оцінювання на основі відповідних критеріїв оптимальності (наприклад, максимальної правдоподібності чи апостеріорної ймовірності [6]).

Якщо дані спостережень не дають підстави для використання стандартних статистичних гіпотез, то як кількісний критерій використовують суму квадратів відхилень результатів спостережень від значень модельних змінних, узятих з відповідними ваговими множниками [4].

Ми не робимо припущення про дію певного випадкового механізму із заданими статистичними властивостями. Тому як критерій оцінки знайдених параметрів використаємо функціонал такого вигляду:

$$\Phi(p) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^r \left[\left(\frac{x_i(t_j, p) - x_{ej}^{(i)}}{\max(1, x_{ej}^{(i)})} \right)^2 + \left(\frac{x_{ej}^{(i)} - x_i(t_j, p)}{\max(1, x_i(t_j, p))} \right)^2 \right], \quad (16)$$

де $x(t_j, p) \equiv [x_1(t_j, p), \dots, x_r(t_j, p)]^T \in R^r$ – отриманий розв’язок задачі Коші в точці t_j ; $x_{ej}^{(i)} \in R$ – i -та компонента j -го спостереження; $p \in R^L$ – вектор параметрів моделі, M – кількість експериментальних даних; r – розмірність вектора залежних змінних. На межі зміни параметрів p можуть накладатися обмеження вигляду (10)

$$p \in \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \{p \in R^L, p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, \dots, L\}.$$

Таким способом задана ідентифікація параметрів моделі (1)–(2) полягає в знаходженні $p_* \in \tilde{P}$ з умови мінімуму функціонала (16):

$$\Phi(p_*) = \min_{p \in P} \Phi(P) \quad (17)$$

Розв'яжемо ЗНМП (17) тими ж самими методами, щой послідовності задач (11). Для обчислення похідних функціонала $\Phi(p)$ за параметрами p використаємо метод скінченних різниць.

5. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

За допомогою розробленого програмного забезпечення мовою Object Pascal в інтегрованому середовищі Borland Delphi 5.0 виконано числові дослідження задач оптимального керування та ідентифікації параметрів для різних процесів. Наведемо результати числових досліджень задачі оптимізації випуску пеніциліну та задачі ідентифікації параметрів моделі спиртового бродіння.

Задача 1. Розглянемо процес кліткового росту біомаси та утворення пеніциліну, який описує така задача Коші для СЗДР:

$$x_1'(t) = c_1 x_1 (1 - x_1 / c_2); \quad x_2'(t) = c_3 x_1 - c_4 x_2, \quad (15)$$

$$x_1(0) = 0.0294, \quad x_2(0) = 0, \quad t = [0, 1]; \quad (16)$$

$$c_1(\theta) = c_{10} g(\theta), \quad i = 1, 2; \quad g(\theta) = 1.143 \cdot [1 - 0.005(30 - \theta)^2];$$

$$c_3(\theta) = 1.143 \cdot c_{30} \cdot [1 - 0.005(\theta - 20)^2]; \quad c_4(\theta) = c_{40} \cdot \exp\left(-6145 \cdot \left(\frac{1}{273.1 + \theta} - \frac{1}{298}\right)\right);$$

$$c_{10} = 13.099, \quad c_{20} = 0.9426, \quad c_{30} = 4.6598, \quad c_{40} = 4.4555,$$

де x_1 та x_2 – безрозмірні концентрації біомаси та пеніциліну; t – відносний час; $\theta(t)$ – температура, яка змінюється з часом [1].

Сформулюємо таку задачу оптимізації: підібрати температурний режим реакції, за якого досягається максимальне значення концентрації пеніциліну в кінцевий момент часу:

$$\tilde{\varphi}_0(\theta_*) = \min_{u \in U_0} (-y_2(t_e)). \quad (17)$$

Як керування u в цій задачі вибрано температуру $u(t) = \theta(t)$, що змінюється від 15 до 30°С. Функцію керування $\theta(t)$ апроксимуємо кусково-лінійною функцією, побудованою по вузлових значеннях $b = [b_1, \dots, b_n]^T = [\theta(t_1), \dots, \theta(t_n)]^T$, розміщених на проміжку $[t_0, t_e]$. Розбиття виберемо як рівномірне, так і нерівномірне. Відомо, що у випадку сталої температури максимальний вихід пеніциліну досягається при температурі $\theta_c = 25^\circ\text{C}$, $\varphi_c = \varphi(\theta_c) = 0.935483$. У таблиці наведено числові результати розв'язування задачі оптимізації температурного режиму процесу синтезу пеніциліну за різної кількості вузлів розбиття n і різних способів S обчислення похідних.

Таблиця

Числові результати розв'язування задачі оптимізації

n	S	φ_0	b^*	τ	p
3	1	1.03988	(28.61, 25.68, 20.26)	1.0	1.1116
	2	1.03988	(28.60, 25.68, 20.26)	0.79	1.1116
4	1	1.04645	(29.99, 25.08, 24.88, 19.41)	1.12	1.1186
	2	1.04645	(29.99, 25.08, 24.88, 19.40)	1.32	1.1186
5	1	1.05122	(29.99, 26.91, 24.19, 24.46, 18.59)	1.90	1.1237
	2	1.05122	(29.99, 26.90, 24.19, 24.46, 18.59)	2.02	1.1237
7	1	1.05566	(29.99, 28.7, 25.48, 24.62, 23.97, 23.62, 17.5)	3.53	1.1285
	2	1.05566	(29.99, 28.7, 25.47, 24.62, 23.97, 23.62, 17.5)	7.00	1.1285
8	1	1.05672	(29.99, 29.15, 26.12, 24.85, 24.40, 23.83, 23.24, 17.03)	4.61	1.1296
	2	1.05665	(29.11, 29.66, 26.09, 24.87, 24.40, 23.83, 23.26, 17.03)	4.51	1.1295
11	1	1.05816	(29.96, 29.62, 27.97, 26.01, 25.06, 24.58, 24.27, 23.99, 23.38, 22.26, 16.17)	6.41	1.1311
	2	1.05816	(29.61, 29.92, 27.87, 26.03, 25.06, 24.59, 24.27, 23.98, 23.38, 22.26, 16.17)	7.75	1.1311
15	1	1.05873	(29.76, 29.94, 28.99, 27.65, 26.26, 25.41, 24.91, 24.60, 24.37, 24.15, 23.89, 23.52, 22.76, 21.20, 15.53)	9.12	1.1317
	2	1.05872	(29.35, 29.86, 29.24, 27.56, 26.32, 25.38, 24.92, 24.59, 24.36, 24.14, 23.89, 23.52, 22.76, 21.21, 15.49)	11.5	1.1317
21	1	1.05894	(29.74, 29.94, 29.59, 28.85, 27.99, 26.91, 26.08, 25.49, 25.09, 24.81, 24.63, 24.43, 24.28, 24.13, 23.59, 23.73, 23.39, 22.86, 21.89, 20.03, 15.05)	16.6	1.1320
	2	1.05893	(29.45, 29.89, 29.61, 29.02, 27.87, 26.96, 26.08, 25.46, 25.11, 24.79, 24.63, 24.41, 24.28, 24.12, 23.94, 23.73, 23.38, 22.86, 21.89, 20.03, 15.07)	27.3	1.1320
4, $t^{(4)}$	1	1.05630	(29.99, 24.95, 23.35, 17.17)	1.63	1.1292
	2	1.05630	(29.99, 24.94, 23.35, 17.17)	1.51	1.1292
7, $t^{(7)}$	1	1.05876	(29.99, 29.39, 24.86, 24.39, 23.10, 20.21, 15.00)	4.56	1.1318
	2	1.05875	(29.78, 29.54, 24.83, 24.39, 23.10, 20.20, 15.07)	3.78	1.1318

$t^{(4)} = [0, 0.41, 0.85, 1]^T$, $t^{(7)} = [0, 0.1, 0.4, 0.6, 0.85, 0.95, 1]^T$ – координати вузлів апроксимації.

Тут φ_0 – значення критерію мети; b^* – вектор оптимізації ($^{\circ}C$); $p = \varphi_0(\theta^*)/\varphi_c$ – значення критерію мети порівняно з оптимальним значенням критерію мети за сталої

температури; τ – відносний час рахунку; $S = 1$ – метод спряжених рівнянь; $S = 2$ – правосторонніх скінченних різниць. Відносний час рахунку вибрано як відношення часу оптимізації прирізних n , S до часу оптимізації при $n = 3$, $S = 1$. У випадку використання методу скінченних різниць значення приросту кожного з параметрів оптимізації вибрано $\Delta = 0.01$. У всіх випадках початкове значення температури $u_0(t) = 25^\circ \text{C}$.

Завдяки розв'язуванню задачі при різній кількості n вузлів апроксимації (t_1, t_2, \dots, t_n) вдалося збільшити вихід пеніциліну приблизно на 11-13% порівняно з виходом пеніциліну в разі оптимального сталого керування $\theta(t) = 25$. З отриманих результатів випливає, що доцільніше використовувати метод спряжених рівнянь (особливо зі збільшенням розмірності n вектора оптимізації b), оскільки отримано ліпше значення критерію мети з меншими затратами часу. З іншого боку з використанням методу спряжених рівнянь автоматично відпадає проблема вибору приросту параметрів оптимізації Δ . Виконані обчислювальні експерименти свідчать, що точність обчислення похідних методом скінченних різниць, як і всього оптимізаційного процесу, залежить від приросту кожного з параметрів оптимізації. Невдало підібраний приріст Δb_i може призвести до похибки у знаходженні цих похідних. Як наслідок, процедура пошуку мінімуму припиняється в іншій точці з гіршим значенням критерію мети.

На Рис.1 показано графіки розподілу концентрації пеніциліну та біомаси за оптимальної сталої температури 25°C та оптимальної змінної температури при $n = 15$, відповідно.

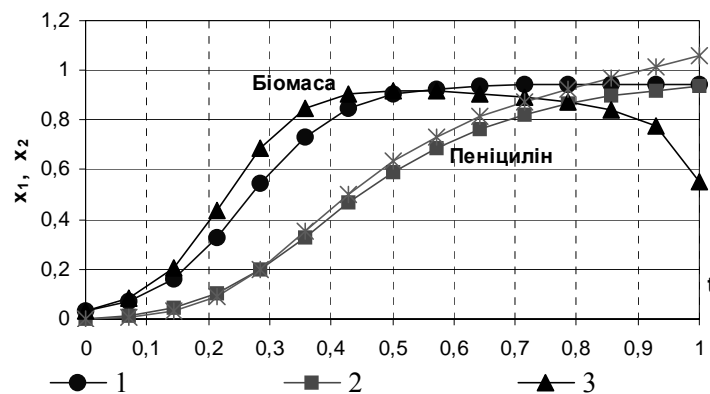


Рис. 1. Графік розподілу концентрації біомаси та пеніциліну за оптимальної постійної температури та знайденого змінного оптимального температурного режиму:

1 – розподіл біомаси при початковій температурі; 2 – розподіл пеніциліну при початковій температурі; 3 – розподіл біомаси при оптимальній температурі; 4 – розподіл пеніциліну при оптимальній температурі.

На Рис. 2 зображено графік оптимальної зміни температури для процесу кліткового росту біомаси та утворення пеніциліну.

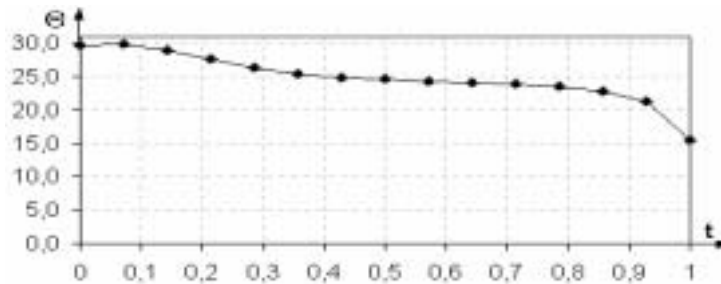


Рис. 2. Графік оптимального розподілу температури для процесу синтезу пеніциліну.

З отриманих результатів випливає, що вдалий підбір розміщення вузлів апроксимації (час зміни температури) дає змогу досягти близького до оптимального результату вже в разі чотирьох вузлів розбиття. За нерівномірного ж розміщення семи вузлів апроксимації отримаємо значення критерію мети, близьке до результату задачі при рівномірному розбитті проміжку 21 вузлом. Це дає суттєву економію в разі технічного впровадження процесу у виробництво.

Задача 2. Така задача Коші описує процес спиртового бродіння у винному суслі, яке відбувається під дією культури дріжджів “47-к” [2, 5]:

$$S'(t) = -X \cdot v_0 \exp[-K_2(S_0 - S)]; \quad (18)$$

$$X'(t) = X[\mu_m - K_1(S_0 - S)]$$

$$X(t_0) = X^0, S(t_0) = S^0, t \in [t_0, t_e], \quad (19)$$

де X – концентрація дріжджів, кількість дріжджових клітин/мл; S_0 і S – концентрація цукру у вихідному суслі та суслі, що бродить, мг/мл.

Параметрами, що лімітують процес бродіння є питома швидкість росту дріжджів $\mu = \mu_m - K_1(S_0 - S)$ та питома швидкість зброджування цукру $v = v_0 \exp(-K_2(S - S_0))$, де μ_m – максимальна питома швидкість росту дріжджів; v_0 – питома швидкість утворення етанолу в разі його відсутності, K_1, K_2 – коефіцієнти пропорційності. Як вектор p параметрів моделі, які підлягають ідентифікації, виберемо вектор $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$, $p_1 = \mu_m$, $p_2 = K_1$, $p_3 = K_2$, $p_4 = v_0$.

Сформулюємо таку задачу ідентифікації параметрів: за заданої температури знайти такий вектор параметрів моделі p_* , який мінімізує відхилення між експериментальними даними та отриманим розв'язком математичної моделі, тобто функціонал вигляду (16). Задачу розв'яжемо за таких вхідних даних: $X^0 = 1.6 \cdot 10^6$ клітин/мл, $S^0 = 216$ мг/мл, $p_0 = [0.07, 0.0055, 0.012, 1.89]^T$, $p^- = [0.04, 0.0001, 0.01, 1.0]^T$, $p^+ = [0.1, 0.0007, 0.1, 4.0]^T$.

За експериментальні дані в цій задачі вибрано значення концентрації цукру та дріжджів для білого технічного вина “Рислінг”, процес зброджування якого відбувався за сталої температури $\theta = 17-18$ °C. Дані спостережень отримані в Інституті винограду і вина “Магарач”, м. Ялта. Кількість експериментів – 15.

На Рис. 3, 4 показано графіки розподілу з часом концентрацій цукру та дріжджів за знайденими у результаті розв'язування задачі ідентифікації параметрами моделі $p_* = [0.04, 0.0003, 0.017, 3.7]^T$. Точками на цих графіках позначені відповідні експериментальні значення.

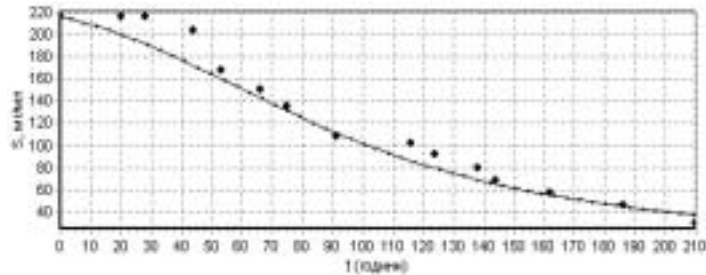


Рис. 3. Графік зміни концентрації цукру в часі

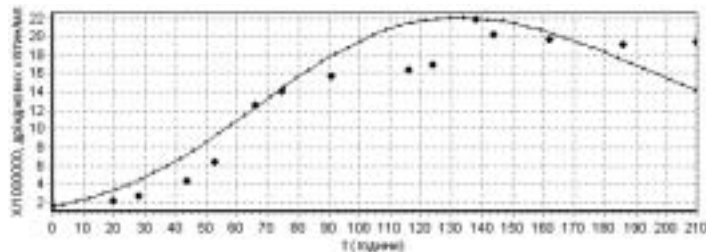


Рис. 4. Графік зміни концентрації дріжджів у часі

Отримані результати задачі ідентифікації параметрів відображають добру узгодженість між експериментальними даними та даними, отриманими згідно з моделлю спиртового бродіння.

7. ВИСНОВКИ

Отже, розроблене програмне забезпечення для розв'язування задач аналізу, оптимального керування та ідентифікації параметрів систем, поведінку яких описує ВЗДР, дає змогу наповнити відповідні математичні моделі досліджуваних процесів реальним фізичним змістом. Це дає змогу використовувати програмне забезпечення для прогнозування поведінки досліджуваних процесів і пропонувати різні варіанти керування цими процесами.

Отримані результати числових досліджень задач оптимізації свідчать, що можна знайти такі значення функції керування, які допомагають поліпшити показники ефективності оптимізованих систем. Варто наголосити, що значення функціоналів залежать як від кількості вузлових значень, якими апроксимуємо функцію керування, так і від їхнього розміщення на проміжку апроксимації. Вдале нерівномірне розміщення вузлів апроксимації дає змогу отримати значення критерію мети, яке для рівномірного розбиття досягне за значно більшої кількості параметрів керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бейли Дж., Оллис Д.* Основы биохимической инженерии: В 2 ч. Ч. 2. М.: Мир, 1989. 590 с.
2. *Бурьян Н.И.* Микробиология виноделия. Ялта: Ин-т винограда и вина "Магарач", 1997. 432 с.
3. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
4. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991. 230 с.
5. *Разуваев В.С.* Исследование кинетики и оптимизации процесса спиртового брожения виноградного сула. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Краснодар, 1977. 20 с.
6. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982.
7. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 477 с.
8. *Хайер Э., Нерсет С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1980. 280 с.
9. *Щербатий М.В., Іванків К.С.* Порівняльна характеристика методів Рунге-Кутта // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. 1995. Вип. 42. С. 82-87.

OPTIMAL CONTROL AND PARAMETERS IDENTIFICATION OF SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**M. Shcherbatyy, Ya. Matsong***Ivan Franko National University of Lviv**Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

In this paper we consider the optimal control problems and identification parameters problems for the processes described by the initial value problem for systems of first-order differential equations. With the use of piecewise-polynomial function for approximation of control function the problems considered are reduced to the nonlinear mathematical programming problems. They are solved by penalty function method together with conjugate gradient method. Calculation of sensitivity coefficients of functional characteristic of the system with respect to control parameters is realized using two methods -finite difference method and conjugate equations method.

The numerical results for the problem of optimization of penicillin synthesis and identifications parameters of the wine fermentation problem are presented.

Key words: optimal control, parameters identification, conjugate function, nonlinear mathematical programming problem, spirit(wine) fermentation, penicillin synthesis.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.2003

Прийнята до друку 04.11.2003