

УДК 519.6:539.3

## ПОРІВНЯННЯ ПРОСТИХ АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНЮВАЧІВ ПОХИБОК МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЕЛАСТОСТАТИКИ

Г. Квасниця, Г. Шинкаренко

Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

Проаналізовано обчислювальні можливості  $h$ -адаптивних схем методу скінченних елементів, заснованих на добре відомому апостеріорному оцінювачі похибки Зенкевича-Зу [10-13] та нещодавно запропонованому оцінювачі авторів [2]. У розв'язках задач з різним ступенем сингулярності обидві схеми з квадратичними апроксимаціями на трикутниках дають близькі до оптимальних показники збіжності, водночас друга із цих схем потребує менших обчислювальних затрат.

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, апостеріорні оцінки похибки,  $h$ -адаптування.

### 1. ВСТУП

Розв'язування переважної більшості практично важливих задач еластостатики класичними схемами методу скінченних елементів (МСЕ) потребує настільки густих сіток, що цей факт часто слугує головною мотивацією для розвитку його нових версій, здатних гарантувати належну точність і стійкість апроксимацій з меншими обчислювальними затратами.

Одним із шляхів поліпшення якості апроксимацій МСЕ є використання концепції адаптивності, яка передбачає певний спосіб керування похибкою наближених розв'язків за допомогою локального згущення/розрідження сіток скінченних елементів ( $h$ -адаптивність), локального підвищення порядку поліноміальних базисних функцій ( $p$ -адаптивність) або деякої узгодженої комбінації обох згаданих алгоритмів ( $hp$ -адаптивність). Головні досягнення теорії та практики адаптивних схем МСЕ описані в працях [1,4-6,8,9].

Становлення адаптивних схем МСЕ значно зумовлене розробкою зручних і надійних апостеріорних оцінювачів похибки апроксимацій МСЕ, здатних ідентифікувати ту сукупність скінченних елементів, на якій локалізовані найбільші похибки знайденого наближення, і, врешті-решт, спроможних гарантувати, що в результаті послідовних локальних поліпшень досягнуто наперед заданого рівня точності апроксимацій на кожному скінченному елементі триангуляції. Серед оцінювачів апостеріорних похибок для задач еластостатики ми вирізняємо розробку Зенкевича і Зу, перший варіант якої з'явився в 1987 р. [10] і довершений, що ґрунтується на відтворенні напружень по точках суперзбіжності (superconvergent patch recovery) – в 1992 р. [11-13]. Як зазначають автори [5], проста й інтуїтивно зрозуміла інженерів процедура післяпроцесорного згладжування обчислених напружень дала змогу сконструювати простий оцінювач похибки, який на практиці приводить до дуже добрих результатів.

Нещодавно в [2] ми запропонували новий оцінювач апостеріорної похибки апроксимацій МСЕ для задач еластостатики. На відміну від SPR-процедури Зенкевича-Зу, цей оцінювач має міцну математичну основу – дає змогу гарантовано знайти похибку вектора зміщень у певному підпросторі ортогонального доповнення до підпростору апроксимацій МСЕ. Наш вибір базису цього підпростору із бабл-функцій дозволяє не лише надати фізичного смислу шуканим коефіцієнтам похибки зміщень, а й одержати деякі важливі характеристики апроксимацій МСЕ.

Нижче наведено формулювання задач і необхідні характеристики оцінювачів енергетичної норми апостеріорної похибки зміщень Квасниці-Шинкаренка та напружень Зенкевича-Зу (далі АПЗ- та АПН-оцінювачі, відповідно), а також стратегію  $h$ -адаптування в МСЕ, яка використовує розподіл відносної похибки між елементами триангуляції. Проаналізовано теж числові результати для двох модельних задач із сингулярними розв'язками, наведено якісні характеристики послідовних уточнень кусково-квадратичних апроксимацій на трикутних сітках з використанням обох оцінювачів.

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТА ГОЛОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Процес деформування пружного тіла, що займає обмежену область  $\Omega \subset R^d$  з неперервною за Ліпшицем межею  $\Gamma$ , під дією масових сил  $f = \{f_i(x)\}_{i=1}^d$  та поверхневих навантажень  $g = \{g_i(x)\}_{i=1}^d$  описує така крайова задача теорії пружності:

$$-\sigma_{ij,j}(u) = f_i, \tag{1}$$

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_u; \quad \sigma \cdot n = g \quad \text{на } \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u. \tag{3}$$

Тут вектор  $u = \{u_i(x)\}_{i=1}^d$  позначає шукані зміщення;  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$  – тензор напружень;  $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u) := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\}_{i,j=1}^d$  – тензор деформацій;  $A$  – симетрична додатно визначена матриця пружних характеристик матеріалу;  $n = \{n_i\}_{i=1}^d$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $\Gamma$ .

Відповідна до (1) - (3) варіаційна задача еластостатики в термінах зміщень зводиться до розв'язування рівняння

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx, \\ \langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_\sigma} g \cdot v dx \quad \forall u, v \in V \end{aligned} \tag{5}$$

та

$$V := \{v = \{v_i\}_{i=1}^d \in H^1(\Omega)^d : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$$

– простір кінематично допустимих векторів зміщень з енергетичною нормою

$$|v|_V := a(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

Згідно з класичною технологією МСЕ, покриваємо область  $\Omega$  сіткою трикутних скінченних елементів  $T_h = \{K\}$ , де  $h := \max_{K \in T_h} h_K$ ,  $h_K := \text{diam } K$ , і позначимо через  $B_m = (x_1^m, x_2^m)$  вершини трикутника  $K$ , пронумеровані проти годинникової стрілки. Нарешті, середину сторони трикутника  $K$ , яка лежить навпроти вершини  $B_m$ , будемо позначати символом  $C_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Для подальшого аналізу адаптивних схем ми виберемо кусково-визначений простір апроксимацій

$$V_h := \{v = (v_1, v_2) \in V \cap [C(\Omega)]^2 : v_i|_K \in P_2(K) \quad \forall K \in T_h\} \quad (7)$$

і розглянемо апроксимацію Гальоркіна  $u_h \in V_h$  як розв'язок рівняння

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \quad (8)$$

Знайдений розв'язок  $u_h \in V_h$  допускає кусково-визначене подання вектора зміщень у вигляді

$$u_h(x) := \sum_{i=1}^3 \{u_h(B_i)N_i(x) + u_h(C_i)N_{i+3}(x)\} \quad \forall K \in T_h \quad (9)$$

де  $N_i(x)$  є базисними функціями простору квадратичних поліномів  $P_2(K)$ .

Формула (2.9) дає змогу локально обчислити тензори деформацій  $\varepsilon(u_h)$  та напружень  $\sigma(u_h)$  на кожному скінченному елементі  $K$ , які, взагалі кажучи, становлять розривні характеристики розв'язку задачі еластостатики.

Априорні оцінки похибки апроксимації Гальоркіна

$$e = u - u_h \quad (10)$$

свідчать, що за достатньо регулярного розв'язку задачі еластостатики ця похибка є величиною порядку  $O(h^2)$  в нормі простору  $V$ . Такі оцінки дають досить точну інформацію про порядок швидкості збіжності МСЕ, однак є недостатніми для обчислення значень цієї похибки, оскільки містять константи, які залежать від норми точного розв'язку. Щоб мати об'єктивнішу інформацію про знайдені наближені розв'язки, потрібно орієнтуватися на розв'язування такої задачі оптимізації:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано допустимий рівень } \theta = \text{const} > 0 \text{ відносної похибки апроксимації} \\ \text{в енергетичній нормі } |\cdot|_V \text{ простору допустимих функцій } V; \\ \text{знайти триангуляцію } T_h = \{K\} \text{ для побудови простору апроксимацій} \\ V_h \subset V \text{ таку, що апроксимація Гальоркіна } u_h \in V_h, \\ \text{знайдена з варіаційного рівняння рівноваги пружного тіла} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h, \\ \text{задовольняє умову} \\ \frac{|u - u_h|_V}{|u|_V} \times 100\% \leq \theta. \end{array} \right. \quad (11)$$

Формулювання останньої задачі свідчить про важливість одержання надійних та зручних апостеріорних оцінок похибки апроксимацій.

### 3. ОЦІНЮВАЧ АПОСТЕРІОРНОЇ ПОХИБКИ ЗМІЩЕНЬ

Нижче наведено головні результати побудови оцінювачів апостеріорних похибок, запропоновані в статті [2].

З огляду на (4) і (8) похибка апроксимації Гальоркіна є розв'язком такої варіаційної задачі

$$\begin{cases} \text{задано апроксимацію Гальоркіна } u_h \in V_h \text{ для розв'язку} \\ u \in V \text{ задачі (2.4), } V_h \subset V; \\ \text{знайти похибку } e := u - u_h \in E := V \setminus V_h \text{ таку, що} \\ a(e, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E, \end{cases} \quad (12)$$

де  $\rho(u_h) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v)$  – лінійний функціонал лишку рівнянь рівноваги. В праці [2] визначена фундаментальна властивість цього функціонала

$$\|\rho(u_h)\|_* = |e|_V. \quad (13)$$

Локальний оцінювач апостеріорної похибки

$$\eta_K(u_h) := |e_h|_K \equiv \left\{ \int_K \sigma(e_h) : \varepsilon(e_h) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h, \quad (14)$$

де  $e_h$  – апроксимація Гальоркіна для розв'язку задачі (12), знайдена із дискретизованої варіаційної задачі

$$\begin{cases} \text{задано } E_h \subset E, \dim E_h = M < \infty; \\ \text{знайти } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ a(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E_h. \end{cases} \quad (15)$$

Завдяки використанню кубічних функцій-бульбашок  $\{b_K\}_{K \in T_h}$ , задача (15) зводиться до послідовного розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$A^K z_K = r^K \quad \forall K \in T_h, \quad (16)$$

коефіцієнти якої обчислюють згідно з правилами

$$\begin{aligned} A_{ij}^K &:= \int_K a_{ijm} \frac{\partial b}{\partial x_n} \frac{\partial b}{\partial x_m} dx, \\ r_i^K &:= \int_K [f_i + \sigma_{ij,j}(u_h)] b dx, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad \forall K \in T_h. \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді локальний апостеріорний оцінювач похибки зміщень (АПЗ-оцінювач) на скінченному елементі обчислюють за правилом

$$\eta_K(u_h) = \{z_K \cdot A^K z_K\}^{\frac{1}{2}} = \{z_K \cdot r^K\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h. \quad (18)$$

### 4. ОЦІНЮВАЧ АПОСТЕРІОРНОЇ ПОХИБКИ НАПРУЖЕНЬ

На відміну від запропонованого нами в [2] способу оцінки похибки зміщень на підставі автономного уточнення їхньої поведінки в межах кожного скінченного елемента, Зенкевич і Зу розробили оцінювач апостеріорної похибки напружень на елементах [10]. У запропонованій ними процедурі є припущення, що у випадку знайдених квадратичних апроксимацій зміщень на трикутниках (9) точне значення

тензора напружень  $\sigma(u)$  апроксимується неперервним кусково-квадратичним тензором

$$\sigma_h(x) := \sum_{i=1}^3 \{ \sigma_h(B_i) N_i(x) + \sigma_h(C_i) N_{i+3}(x) \} \quad \forall x \in K \quad \forall K \in T_h. \quad (19)$$

Невідомі значення тензорів  $\sigma_h(B_i)$  визначено згідно з таким правилом. На кожній сукупності трикутників

$$\Omega_s := \{ K \in T_h : B_s \in \bar{K} \} \quad (20)$$

які формують окіл вершини  $B_s$ , введемо тензор

$$\sigma^*(B_s; x) := \sum_{k=0}^2 \sum_{m=0}^{2-k} \tau^{km} x_1^k x_2^m \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega_s, \quad (21)$$

коефіцієнти  $\tau^{km}$  якого обчислимо з умов мінімуму квадратичного функціонала

$$\sum_{K \in \Omega_s} \{ \sum_{C_i \in K} [ \sigma(u_h(C_i)) - \sigma^*(B_s; C_i) ] : [ \sigma(u_h(C_i)) - \sigma^*(B_s; C_i) ] \}. \quad (22)$$

Тоді коефіцієнти формули (19) обчислимо так:

$$\sigma_h(B_i) := \sigma^*(B_i; B_i), \quad \sigma_h(C_i) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (1 - \delta_{ij}) \sigma^*(B_j; C_i).$$

Нарешті, похибка в напруженнях

$$\tilde{e}_\sigma = \sigma_h(x) - \sigma(u_h), \quad (23)$$

і локальний оцінювач апостеріорної похибки напружень (АПН-оцінювач) набуває вигляду

$$\eta_K(u_h) := |\tilde{e}|_K \equiv \left\{ \int_K \tilde{e}_\sigma : A^{-1} \tilde{e}_\sigma \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h. \quad (24)$$

## 5. СТРАТЕГІЯ ПРОЦЕСУ АДАПТУВАННЯ

Для організації процесу адаптивного згущення сітки зручно використовувати відносну похибку в енергетичній нормі

$$\delta = \frac{|e|_V}{|u|_V} \times 100\%, \quad (25)$$

де  $|u|_V$  – енергетична норма точного розв'язку, що наближено визначена як

$$|u|_V = \{ |u_h|_V^2 + |e|_V^2 \}^{\frac{1}{2}} \approx \{ |u_h|_V^2 + \eta^2(u_h) \}^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

Тут і далі

$$\eta(u_h) := \left\{ \sum_{K \in T_h} \eta_K^2(u_h) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

прийнято за апостеріорний оцінювач похибки на триангуляції в цілому.

Якщо ми задаємо рівень допустимої відносної похибки  $\theta$ , то метою адаптування, згідно з (11), є побудова такої триангуляції, на якій виконується умова  $\delta \leq \theta$ . Локально ж на кожному скінченному елементі повинна виконуватись умова [10]

$$\eta_K(u_h) < \eta_h := \frac{\theta}{100} \left( \frac{|u_h|_V^2 + \eta^2(u_h)}{M_h} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

де  $M_h$  – загальна кількість елементів триангуляції. Ті скінченні елементи  $K$ , для яких

$$\alpha_K := \frac{\eta_K(u_h)}{\eta_h} > 1, \quad (29)$$

підлягають поділу на  $\alpha_K$  скінченних елементів. Така процедура приводить до вирівнювання значень енергетичних норм похибки на всіх елементах нових триангуляцій. Наведена вище стратегія використана для адаптивного поліпшення сіток у проведених обчислювальних експериментах.

#### 6. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

*Коротка консольна балка.* Квадратна пластинка, рівномірно навантажена на верхній межі тиском  $g = 0,1 \text{ Н/м}^2$  та жорстко закріплена вздовж лівої сторони (рис. 1), виготовлена з алюмінію з пружними сталими  $2\mu = \lambda = 0,16 \text{ Н/м}^2$ . Ця задача досить проста, однак її розв’язок має сингулярності у лівому верхньому та нижньому кутах, зумовлені зміною вигляду крайових умов. Розв’язки подібних задач зі змішаними крайовими умовами, взагалі кажучи, є нерегулярними. Як зазначено у [7], є приклади, у яких дані і межа області є гладкими, а розв’язок належить до  $H^s(\Omega)$  для  $s$  строго менших  $\frac{3}{2}$ . З огляду на зменшення регулярності розв’язку можна очікувати зниження порядків швидкості збіжності МСЕ-апроксимацій зміщень.

Далі вибрано рівень допустимої відносної похибки  $\theta = 5\%$ , що вважають достатнім для більшості інженерних розрахунків. Метою нашого обчислювального експерименту було порівняння характеристик запропонованої вище стратегії  $h$ -адаптування з використанням оцінювачів похибки зміщень (18) та напружень (24). Як можна побачити з рис.1, адаптування з використанням обох оцінювачів приводить до подібної структури сіток скінченних елементів. Обидва алгоритми адаптування впевнено виявляють сингулярності розв’язку в околі кутів защемленої межі пластини, послідовно подрібнюючи трикутники в цих ділянках.

Деякі кількісні результати експерименту наведено в табл. 1 - 4. У цілому вони підтверджують, що використання технології адаптивного згущення сітки у цій задачі дає змогу підвищити порядки збіжності як в енергетичній нормі, так і в нормі простору  $H := L^2(\Omega)^2$  до теоретично очікуваних. Тут  $k$  – номер ітерації;  $M_h$  – загальна кількість трикутників у триангуляції  $T^k$ ;  $N_h$  – загальна кількість вузлів триангуляції;  $Mk$  – кількість елементів, які на заданій ітерації потребують поділу,  $\rho_h = h_{\max}/l_{\min}$  – характеристика нерегулярності даної триангуляції ( $l_{\min}$  – найкоротша зі сторін її трикутників);  $p_i$  – порядок швидкості збіжності схеми МСЕ в нормі простору  $H$  ( $i=0$ ) та в енергетичній нормі  $|\cdot|_V$  ( $i=1$ ), відповідно;  $z_{\max}$  – максимальне точкове значення модуля похибки зміщень у центрах ваг скінченних елементів;  $u_{\max}$  – максимальне значення модуля вектора зміщень у вузлах сітки.

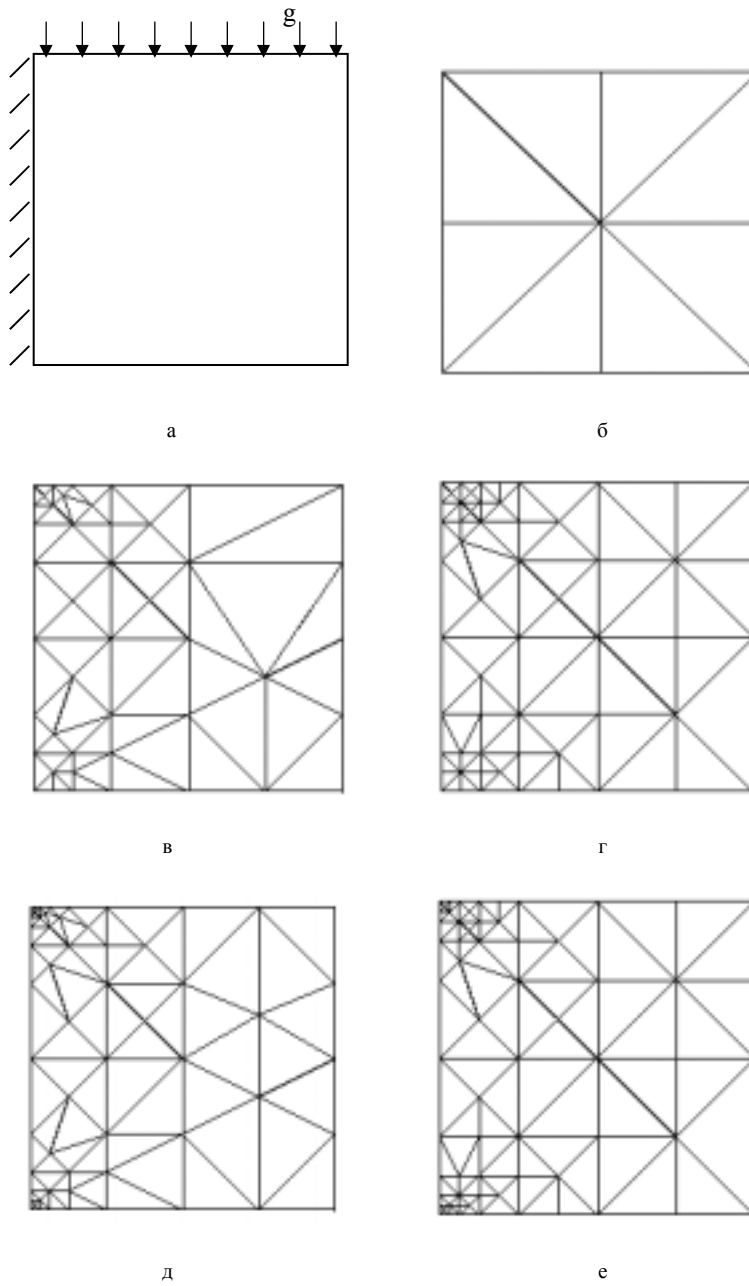


Рис. 1. Коротка консольна балка:  
 а - умови закріплення та навантаження; б - вихідна триангуляція  $T^0$ ; в, д - триангуляції  $T^3$  і  $T^6$ , побудовані за допомогою АПЗ-оцінювача (18); г, е - триангуляції  $T^3$  і  $T^6$ , побудовані за допомогою АПН-оцінювача (24).

Таблиця 1.

Збіжність  $h$ -адаптування на основі АПЗ-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$Mk$	$\rho_h$	$ e_h _V \times 10^4$	$ u_h _V^2 \times 10^4$	$p_1$	$\delta$
0	25	8	4	1,41	32,90930	4,28059		11,18%
1	66	27	8	3,16	18,29800	4,42130	1,21	6,14%
2	115	48	5	6,32	11,69560	4,46389	1,36	3,91%
3	151	64	6	12,65	8,26381	4,47948	1,54	2,76%
4	179	76	3	16,97	6,23220	4,48541	1,69	2,08%
5	189	80	4	24,00	5,99508	4,48795	1,68	2,00%
6	203	86	0	33,94	5,30964	4,48880	1,74	1,77%

Таблиця 2.

Збіжність  $h$ -адаптування на основі АПН-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$Mk$	$\rho_h$	$ \tilde{e} _V \times 10^4$	$ u_h _V^2 \times 10^4$	$p_1$	$\delta$
0	25	8	8	1,41	47,36880	4,28059		15,98%
1	94	39	8	2,83	16,99920	4,43022	1,55	5,70%
2	133	56	7	4,00	16,22160	4,46151	1,28	5,42%
3	196	85	4	11,31	8,26685	4,48260	1,70	2,76%
4	214	93	2	16,00	7,27415	4,48428	1,75	2,43%
5	228	99	0	22,63	6,48879	4,48794	1,80	2,17%

Таблиця 3.

Збіжність апроксимацій у разі рівномірного згущення сітки

$k$	$N_h$	$M_h$	$ e_h _V \times 10^4$	$ \tilde{e} _V \times 10^4$	$ u_h _V^2 \times 10^4$	$p_1$	$\delta$
0	25	8	32,90930	47,36880	4,28059		15,98%
1	81	32	20,35560	26,55370	4,41386	0,98	8,90%
2	289	128	12,42530	15,89070	4,46421	0,89	5,31%
3	1089	512	7,68412	9,81212	4,48290	0,83	3,28%
4	4225	2048	4,76764	6,08556	4,49004	0,80	2,03%

Таблиця 4.

Додаткові значення, обчислені в процесі  $h$ -адаптування на основі АПЗ-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$ e_h _H \times 10^4$	$ u_h _H \times 10^2$	$p_0$	$z_{\max} \times 10^4$	$u_{\max}$
0	25	8	5,77218	8,37080		22,12390	0,16462
1	66	27	1,72424	8,66484	2,49	9,52407	0,16628
2	115	48	0,67283	8,76185	2,82	5,88275	0,16767
3	151	64	0,48744	8,79087	2,75	3,67810	0,16813
4	179	76	0,28382	8,81131	3,06	2,29106	0,16863
5	189	80	0,27338	8,81627	3,02	1,98574	0,16871
6	203	86	0,27114	8,81789	2,92	1,47043	0,16874



Як можна побачити з даних табл. 1 та 2, завдяки генеруванню нерегулярніших сіток АПЗ-алгоритм збігається ( $Mk = 0$ ) на триангуляції з меншою кількістю елементів. Як у сенсі енергетичної норми похибки, так і в значеннях енергії обидва алгоритми адаптування породжують монотонно збіжні послідовності апроксимацій з показниками швидкості збіжності, близькими до оптимальних. Для порівняння в табл. 3 наведено ті самі характеристики збіжності апроксимацій МСЕ у разі рівномірного згущення сіток. Виграш  $h$ -адаптування переконливий – для досягнення точності в 2% рівномірне згущення потребує сіток з 20-разовим збільшенням скінченних елементів.

У табл. 4 наведено деякі додаткові характеристики збіжності АПЗ-алгоритму, які, зокрема, свідчать, що він досягає оптимальних показників збіжності і для середньоквадратичної норми. Крім того, тут добре видно, що відносна похибка апроксимацій змисень у цій нормі є значно меншою від 1%.

*Пластинка з квадратним отвором.* Квадратна пластинка з центральним квадратним вирізом рівномірно навантажена по лівому краю та жорстко закріплена вздовж нижнього (рис. 2). Як і в попередньому прикладі, матеріал пластинки – алюміній, інтенсивність поверхневого тиску  $g = 0,1 \text{ Н/м}^2$ . У цій задачі, крім сингулярностей, зумовлених змішаними крайовими умовами, простежуються особливості у вершинах внутрішнього контуру пластини. Відомо [7], що в околі цих точок шукані зміщення мають особливість вигляду  $r^{\frac{3}{2}}$ , де  $r$  – відстань до вершини кута. Отже, напруження в околі таких точок подібні до  $r^{-\frac{1}{3}}$  і необмежено зростають у разі підходу до внутрішньої вершини. Тому в цій задачі повинні простежуватись порядки швидкості збіжності апроксимацій МСЕ, нижчі від порядків похибок інтерполявання.

На рис. 2 відтворено специфіку послідовного  $h$ -адаптування сіток АПЗ- та АПН-алгоритмами. Обидва оцінювачі практично відразу реагують на сингулярності у вершинах внутрішніх кутів, причому всі кути виявляються рівноправними. Порівняно з ними слабшою є особливість у нижньому лівому куті пластинки, проте і в околі цієї точки обидва оцінювачі вимагають згущення сітки.

У табл. 5 - 8 наведено характеристики збіжності обох адаптивних схем МСЕ у подібному стилі, як це зроблено раніше. Як видно з табл. 5 і 6, АПЗ-алгоритм буде рідкіші сітки за одного і того ж рівня похибки. Врешті-решт це приводить до значної економії обчислювальних ресурсів, а саме: АПЗ-алгоритм потребує розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь МСЕ, порядки яких приблизно на 30% менші від систем АПН-алгоритму.

Знову ж таки, як бачимо з табл. 7, цілеспрямоване локальне згущення сіток в околі точок з сингулярностями розв'язку дає змогу досягати ліпших показників швидкості збіжності адаптивних апроксимацій, ніж традиційне рівномірне згущення сіток скінченних елементів.



Таблиця 5.

Збіжність  $h$ -адаптування на основі АПЗ-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$Mk$	$\rho_h$	$ e_h _V \times 10^2$	$ u_h _V^2$	$p_1$	$\delta$
0	36	12	12	1,41	11,75870	0,10918		24,40%
1	207	85	43	2,83	5,38147	0,13460	0,89	10,32%
2	547	243	38	5,66	3,33729	0,13921	0,93	6,31%
3	874	398	36	16,00	2,14349	0,14085	1,07	4,04%
4	1091	497	24	32,00	1,71197	0,14140	1,13	3,22%
5	1230	560	27	64,00	1,44436	0,14164	1,19	2,71%
6	1369	625	19	90,51	1,30821	0,14176	1,21	2,46%
7	1429	653	11	128,00	1,23781	0,14180	1,22	2,32%
8	1494	682	15	181,02	1,20591	0,14183	1,22	2,26%
9	1557	711	7	256,00	1,17043	0,14185	1,22	2,20%
10	1581	721	1	256,00	1,15628	0,14186	1,23	2,17%
11	1584	722	0	362,04	1,15685	0,14186	1,23	2,17%

Таблиця 6.

Збіжність  $h$ -адаптування на основі АПН-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$Mk$	$\rho_h$	$ \tilde{e} _V \times 10^2$	$ u_h _V^2$	$p_1$	$\delta$
0	36	12	12	1,41	9,98670	0,10918		20,90%
1	180	72	61	2,00	7,25140	0,13257	0,83	13,94%
2	610	272	58	5,66	4,74203	0,13919	0,90	8,95%
3	1143	525	60	12,65	2,71899	0,14101	0,99	5,11%
4	1598	742	52	25,30	1,68706	0,14166	1,10	3,17%
5	1833	849	33	50,60	1,47750	0,14188	1,18	2,77%
6	2009	931	26	82,58	1,36300	0,14198	1,21	2,56%
7	2144	994	28	143,11	1,32431	0,14202	1,23	2,48%
8	2342	1090	57	286,22	7,41285	0,14205	1,23	13,78%

Таблиця 7.

Збіжність апроксимацій у разі рівномірного згущення сітки

$k$	$N_h$	$M_h$	$ e_h _V \times 10^2$	$ \tilde{e} _V \times 10^2$	$ u_h _V^2$	$p_1$	$\delta$
0	36	12	11,75870	9,98670	0,10918		24,40%
1	120	48	6,87249	6,63961	0,13016	0,89	13,35%
2	432	192	3,81561	4,21582	0,13732	0,91	7,26%
3	1632	768	2,46925	2,75640	0,14002	0,82	4,66%
4	6336	3072	1,66806	1,84970	0,14120	0,76	3,14%

Таблиця 8.

Додаткові значення, обчислені в процесі  $h$ -адаптування на основі АПЗ-оцінювача

$k$	$N_h$	$M_h$	$ e_h _H \times 10^2$	$ u_h _H$	$p_0$	$z_{\max} \times 10^2$	$u_{\max}$
0	36	12	1,38516	2,08347		5,36398	4,00902
1	207	85	0,27050	2,62815	1,87	1,71178	5,00208
2	547	243	0,08336	2,72794	2,07	0,81133	5,19391
3	874	398	0,03695	2,76321	2,27	0,47709	5,25957
4	1091	497	0,02778	2,77582	2,29	0,34860	5,28367
5	1230	560	0,02620	2,78115	2,25	0,25723	5,29377
6	1369	625	0,02369	2,78398	2,24	0,19008	5,29894
7	1429	653	0,02333	2,78483	2,22	0,18077	5,30049
8	1494	682	0,02333	2,78559	2,19	0,15760	5,30199
9	1557	711	0,02314	2,78611	2,17	0,13246	5,30296
10	1581	721	0,02291	2,78630	2,17	0,09238	5,30333
11	1584	722	0,02291	2,78632	2,17	0,08977	5,30336

7. ВИСНОВКИ

Отже, проаналізовано  $h$ -адаптивні схеми МСЕ, які працюють з апостеріорними оцінювачами похибки Квасниці-Шинкаренка та Зенкевича-Зу для квадратичних апроксимацій пружних зміщень на трикутних скінченних елементах. Обидві схеми дали прекрасні результати порівняно з класичною схемою МСЕ рівномірного глобального згущення сітки. Оскільки у всіх випадках використано квадратичні апроксимації на трикутниках, то поліпшену якість  $h$ -адаптивних апроксимацій ми пояснюємо значним збільшенням запасів їхньої стійкості.

Незважаючи на лише локальне згущення сіток, обидві схеми адаптування демонструють монотонне поліпшення апроксимацій МСЕ, їхніх енергетичних та інших інтегральних характеристик і досягають оптимальних показників швидкості збіжності навіть на сингулярних розв'язках задач еластостатики.

Нарешті, в питаннях однорідності алгоритму та обчислювальних витрат на його реалізацію схема з АПЗ-оцінювачем має незаперечні переваги: вона потребує розв'язування лише систем з двох лінійних алгебричних рівнянь для відшування наближених значень похибки зміщення в центрі ваги кожного скінченного елемента.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дяк І.І. Адаптивний алгоритм для задачі теорії пружності на основі гібридних апроксимацій // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип.50. С. 78-80.
5. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 95-106.
6. Квасниця Г.А., Шинкаренко Г.А. Стратегія  $h$ -адаптування схем методу скінченних елементів для задач теорії пружності. // Міжнарод. конф. "Обчислювальна та прикладна математика". Тези доп. 9-10 вересня 2002р., Київ.- С. 52.

7. *Макар В.М.* Чисельні схеми підвищення точності розрахунків на основі h-адаптивної версії МСЕ // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50. С. 160-162.
8. *Ainsworth M., Oden J.T.* A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. New York: Wiley, 2000. 240 p.
9. *Harari I., Hughes T.J.R., Gresh K. et al.* Recent developments in finite element methods for structural acoustics // Archiv Comput. Mech. Engng. 1996. Vol. 3. P. 131-309.
10. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 1994. 540 p.
11. *Verfürth R.* A Review of A Posteriori Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Advances in Numerical Mathematics. New York, Stuttgart: Wiley/Teubner, 1996.
12. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol.1: The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002. 688 p.
13. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Numer. Methods Engng. 1987. Vol. 24. P. 337-357.
14. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation in the finite element method. Part I: A general superconvergent recovery technique // Int. J. Numer. Methods Engng. 1992. Vol. 33. P. 1331-64.
15. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* The superconvergent patch recovery (SPR) and a posteriori error estimates. Part II: Error estimates and adaptivity // Int. J. Numer. Methods Engng. 1992. Vol. 33. P. 1365-82.
16. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1992. Vol. 101. P. 207-224.

#### COMPARISON OF SIMPLE A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR ELASTOSTATICS PROBLEMS

**H. Kvasnytsya, G. Shynkarenko**

*Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

This paper analyses computational capacities of h-adaptive finite element schemes based upon well-known a posteriori error estimator developed Zienkiewicz-Zhu and an a posteriori error estimator recently introduced by the authors. On solutions of elasticity problems with various singularities both schemes with quadratic approximations on triangular elements show rates of the convergence close to optimum, however the latter scheme requires less computational resources.

*Key words:* finite element method, a posteriori error estimates, adaptive h-refinement

*Стаття надійшла до редколегії 24.09.2003*

*Прийнята до друку 04.11.2003*