ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ — *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. — *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2003. Вип. 7. С. 132-137 — *2003. No 7. P. 132-137*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 539.3

НЕОБХІДНІ УМОВИ ДЛЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

В. Вігак, **Ю. Токовий**

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79053, e-mail: dept11@iapmm.lviv.ua

Запропоновано метод розв'язування плоскої змішаної задачі теорії пружності в прямокутній області шляхом зведення до відповідної задачі в напруженнях. На підставі умов існування розв'язку плоскої задачі теорії пружності в напруженнях для прямокутної області визначено необхідні умови для переміщень на межі області для відповідної змішаної задачі.

Ключові слова: переміщення, напруження, деформації

1. ВСТУП

На заваді побудови точних аналітичних розв'язків задач теорії пружності або термопружності для обмежених областей з кутовими точками (прямокутника, паралелепіпеда, циліндра певної довжини, клиноподібних областей тощо) є потреба задоволення крайових умов на межі області [1], що особливо складно зробити в околі кутових точок. Головна причина цього − відсутність самостійного для механіки, фізично обґрунтованого методу відокремлення змінних у ключових рівняннях, якими є рівняння Ляме в переміщеннях чи Бельтрамі-Мічелла в напруженнях. Натомість беззастережне застосування для розв'язування названих задач допоміжних потенціальних гармонічних чи бігармонічних функцій [2,3], які позбавлені фізичного змісту, може призвести [4] до отримання хибних результатів, які не узгоджуються з вихідними принципами пружності.

На нашу думку, цю проблему простіше вирішити за формулювання таких задач у напруженнях, оскільки принцип Сен-Венана спонукає до пошуку розв'язку у вигляді суперпозиції самозрівноваженої та несамозрівноваженої частин, що зобов'язує будувати відповідні системи власних та приєднаних функцій на основі ключового рівняння. На цій підставі у [5–7] побудовано точні аналітичні розв'язки плоских квазістатичних задач теорії пружності й термопружності в напруженнях для прямокутної області, де суттєво використано метод прямого інтегрування вихідної системи рівнянь механіки. За такого підходу на чільне місце стає інтегрування рівнянь рівноваги, які не залежать від властивостей матеріалу та математичної моделі фізичних співвідношень між напруженнями й деформаціями, що дає змогу визначити співвідношення між компонентами тензора напружень, інтегральні умови рівноваги для напружень та інтегральні зусилля й моменти від напружень в області їх визначення. Застосування згаданого методу дає змогу також визначити умови на зовнішні зусилля, необхідні для існування точного розв'язку задачі.

Успішне застосування методу для силових задач наштовхує на думку побудувати аналогічним способом розв'язки другої та змішаної [8] задач пружності. З огляду на це у роботі запропоновано метод зведення розв'язування плоскої квазістатичної змішаної задачі теорії пружності у прямокутній області до відповідної задачі в напруженнях. З використанням методики [9] після заміни заданих на сторонах прямокутника переміщень невідомими спочатку зусиллями на основі прямого інтегрування ключових рівнянь механіки [5,6] побудовано розв'язок першої задачі пружності у вигляді розвинень у збіжні ряди за повними системами власних і приєднаних функцій. На підставі умов існування розв'язку плоскої задачі пружності в напруженнях для прямокутної області [4] визначено необхідні умови для переміщень в рамках змішаної задачі.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо плоску змішану задачу теорії пружності у прямокутній області $D=\{(x,y)\in[-a,a]\times[-b,b]\}$, яку без масових сил описують [1–3] рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}=0\,, \tag{1}$$

рівняння суцільності в напруженнях

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0,\quad \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2\,, \tag{2}$$

фізичні співвідношення ($e_z=e=\text{const}$)

$$Ee_x=\sigma_x-\mathbf{v}(\sigma_y+\sigma_z),\quad Ee_y=\sigma_y-\mathbf{v}(\sigma_x+\sigma_z),\quad Ee=\sigma_z-\mathbf{v}(\sigma_x+\sigma_y),\quad Ge_{xy}=\sigma_{xy} \tag{3}$$

та рівняння суцільності Коші

$$e_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_y=\frac{\partial v}{\partial x},\quad e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Тут σ_i,σ_{xy} та e_i, e_{xy} ($i=x,y$) – компоненти тензора напружень та деформацій; E, G, $\mathbf{v}$ – модуль пружності, зсуву і коефіцієнт Пуассона; $u=u_*/l, v=v_*/l$; u_*, v_* – компоненти вектора переміщень, l – деяка довжина; (x,y) – безрозмірні координати.

Розв'язок задачі побудуємо при заданих на краях області переміщеннях

$$u(x,b)=u_1(x),\quad u(x,-b)=u_2(x),\quad v(x,b)=v_1(x),\quad v(x,-b)=v_2(x) \tag{5}$$

та зовнішніх зусиллях

$$\sigma_x(\pm a,y)=0,\quad \sigma_{xy}(\pm a,y)=0\,. \tag{6}$$

Скориставшись співвідношеннями між переміщеннями та деформаціями [9], виводимо формули для визначення переміщення на границі (5) через деформації:

$$2u_i(x)=C+(-1)^iBb-\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\frac{\partial}{\partial x}\big(e_y(a)+e_y(-a)\big)\big(b+(-1)^iy\big)dy+\int_{-a}^{a}e_x((-1)^{i+1}b)\,\mathrm{sign}(x-\eta)d\eta,$$

$$2v_i(x)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[\big(e_{xy}(b)+e_{xy}(-b)\big)\mathrm{sign}(x-\eta)-\frac{\partial}{\partial y}\big(e_x(b)+e_x(-b)\big)\,|\,x-\eta\,|\right]d\eta+ \tag{7}$$

$$+A+Bx-(-1)^i\int_{-b}^{b}e_y dy,\quad i=1,2.$$

Формули (7) знайдено за допомогою означеного інтегрування рівностей (4). Тут і надалі для спрощення запису позначено $e_y(a)\equiv e_y(a,y)$ і т.д. Сталі A, B, C

визначено з умов закріплення тіла в деяких точках з метою вилучення його переміщень як жорсткого цілого вздовж двох осей координат і повороту навколо осі, перпендикулярної до площини прямокутної області. Наприклад, поклавши $u_1(-a) = v_1(a) = v_1(-a) = 0$, отримаємо такі вирази для сталих A, B, C:

$$A = \frac{a}{2}\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial y}\big(e_x(b)+e_x(-b)\big)dx - \frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\big(e_y(a)+e_y(-a)\big)dy,$$

$$B = -\frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{a}\left(e_{xy}(b)+e_{xy}(-b)+x\frac{\partial}{\partial y}\big(e_x(b)+e_x(-b)\big)\right)dx + \int_{-b}^{b}\big(e_y(a)-e_y(-a)\big)dy\right],$$

$$C = \frac{b}{2a}\int_{-a}^{a}\left(\frac{2a}{b}e_x(b)-e_{xy}(b)-e_{xy}(-b)-x\frac{\partial}{\partial y}\big(e_x(b)+e_x(-b)\big)\right)dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\left((b-y)\frac{\partial}{\partial x}\big(e_y(a)+e_y(-a)\big)-\frac{b}{a}\big(e_y(a)-e_y(-a)\big)\right)dy. \tag{8}$$

Вилучивши зі співвідношень (3) напруження σ_z, отримаємо такі вирази деформацій через напруження:

$$2Ge_x = (1-\mathbf{v})\sigma_x - \mathbf{v}\sigma_y - 2\mathbf{v}Ge, \quad 2Ge_y = (1-\mathbf{v})\sigma_y - \mathbf{v}\sigma_x - 2\mathbf{v}Ge, \quad Ge_{xy} = \sigma_{xy}, \tag{9}$$

де

$$e = -\frac{\mathbf{v}}{4abE}\iint_D (\sigma_x + \sigma_y)dxdy. \tag{10}$$

Для побудови розв'язку змішаної задачі (1)–(6) зведемо її до відповідної першої крайової задачі.

3. ЗВЕДЕННЯ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДО ЗАДАЧІ В НАПРУЖЕННЯХ

З метою зведення розв'язку задачі (1)–(6) до розв'язання відповідної задачі в напруженнях задамо на сторонах $y = \pm b$ невідомі поки що зусилля

$$\sigma_y(x,b) = -p_1(x), \quad \sigma_y(x,-b) = -p_2(x), \quad \sigma_{xy}(x,b) = q_1(x), \quad \sigma_{xy}(x,-b) = q_2(x). \tag{11}$$

Згідно з розв'язком задачі в напруженнях, який отримано в [4–6], розв'язок задачі (1), (2), (6), (11) має вигляд

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^s, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^s, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^s, \tag{12}$$

де $\gamma_n = \pi n$; $\lambda_n > 0$ – корені рівняння $\operatorname{tg}\lambda = \lambda$ ($n = 1,2,...$),

$$\sigma_y^0 = \frac{1}{4a}\int_{-a}^{a}\left((p_2-p_1)\frac{y}{b}-p_1-p_2\right)dx + \frac{3x}{4a^3}\int_{-a}^{a}\left((p_2-p_1)\frac{y}{b}-p_1-p_2xdx\right),$$

$$\sigma_x^0 = 0, \ \sigma_{xy}^0 = -\frac{3\left(x^2-a^2\right)}{8a^3}\int_{-a}^{a}(q_1+q_2)dx, \tag{13}$$

$$\sigma_x^s = \sum_{m=1}^{\infty}\left(X_m^1(x)\cos\frac{\gamma_m y}{b} + X_m^2(x)\sin\frac{\lambda_m y}{b}\right), \quad \sigma_y^s = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n^1(y)\cos\frac{\gamma_n x}{a} + Y_n^2(y)\sin\frac{\lambda_n x}{a}\right),$$

$$\sigma_{xy}^s = -a\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{dY_n^1}{dy}\frac{\sin\frac{\gamma_n x}{a}}{\gamma_n} + \frac{dY_n^2}{dy}\frac{\cos\lambda_n - \cos\frac{\lambda_n x}{a}}{\lambda_n}\right] - b\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{dX_m^1}{dx}\frac{\sin\frac{\gamma_m y}{b}}{\gamma_m} + \frac{dX_m^2}{dx}\frac{\cos\lambda_m - \cos\frac{\lambda_m y}{b}}{\lambda_m}\right].$$

Наявні у виразах напружень (12) елементарні розв'язки $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{xy}^0$, описані формулами (13), виділяються приєднаними функціями $\{1, y\}$, $\{1, x\}$, $\{1, y, y^2\}$ та $\{1, x, x^2\}$ і залежать від головного вектора та головного момента зовнішніх зусиль (6), (11). Самозрівноважені частини напружень σ_x^s, σ_y^s, σ_{xy}^s, виділені власними функціями, побудовано в [5,6], де функції X_m^i, Y_n^i $(i = 1,2)$ розвинень (13) знайдено у замкнутому вигляді як залежності від коефіцієнтів самозрівноважених частин зовнішніх зусиль (6), (11), розвинених за відповідними системами функцій

$$p_i = a_0^i + x b_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^i \cos \gamma_n x / a + b_n^i \sin \lambda_n x / a \right),$$

$$q_i = c_0^i + x d_0^i + (x^2 - a^2) g_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^i \frac{\sin \gamma_n x / a}{\gamma_n} + d_n^i \frac{\cos \lambda_n - \cos \lambda_n x / a}{\lambda_n} \right), \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Тут [10]

$$\left\{ a_0^i, b_0^i, a_n^i, b_n^i \right\} = \int_{-a}^{a} p_i(x) \left\{ \frac{1}{2a}, \frac{3x}{2a^3}, \frac{\cos \gamma_n x / a}{a}, \frac{\sin \lambda_n x / a}{b \sin^2 \lambda_n} \right\} dx,$$

$$c_0^i = \frac{q_i(a) + q_i(-a)}{2}, \quad d_0^i = \frac{q_i(a) - q_i(-a)}{2a}, \quad g_0^i = \frac{3}{4a^3} \left(a \left(q_i(a) + q_i(-a) \right) - \int_{-a}^{a} q_i(x) dx \right),$$

$$c_n^i = \left(q_i(a) - q_i(-a) \right) \cos \gamma_n + \frac{\gamma_n}{a} \int_{-a}^{a} q_i(x) \sin \frac{\gamma_n x}{a} dx, \tag{15}$$

$$d_n^i = \frac{1 + \lambda_n^2}{\lambda_n} \left(\left(q_i(a) + q_i(-a) \right) a \cos \lambda_n - \int_{-a}^{a} q_i(x) \cos \lambda_n \frac{x}{a} dx \right).$$

Крім того, доведено, що розв'язок задачі (1), (2), (6), (11) існує за виконання для зусиль (11) таких умов:

$$\int_{-a}^{a} q_1 dx = \int_{-a}^{a} q_2 dx, \quad \int_{-a}^{a} p_1 dx = \int_{-a}^{a} p_2 dx, \quad \int_{-a}^{a} (p_1 - p_2) x dx + b \int_{-a}^{a} (q_1 + q_2) dx = 0, \tag{16}$$

$$q_1(a) = q_1(-a) = q_2(a) = q_2(-a) = 0\,. \tag{17}$$

Умови (17) відповідають закону парності дотичних напружень у кутових точках області D, який є необхідним у рамках моделі симетричного тензора напружень. Умови (16) виражають, що головні вектор і момент зусиль (11) дорівнюють нулю.

Тепер на підставі формул (7) побудуємо вирази для коефіцієнтів (15) розвинень (14) невідомих зовнішніх зусиль (11) у ряди через переміщення (6). Побудову виконаємо для коефіцієнтів несамозрівноважених частин зусиль (11), оскільки для самозрівноважених – коефіцієнти визначаються аналогічно. З використанням (9), (10), (13), (14) та формул (7) отримаємо такі рівності:

$$2u_1(x) = C - bB + \frac{(1-\mathbf{v}) b^2}{3G} \left(b_0^1 + 2b_0^2 \right) + \frac{\mathbf{v}}{G(1+\mathbf{v})} x a_0^1 + \frac{\mathbf{v}}{2G} \left(x^2 - a^2 \right) b_0^1,$$

$$2u_2(x) = C + bB + \frac{(1-\mathbf{v}) b^2}{3G} \left(b_0^2 + 2b_0^1 \right) + \frac{\mathbf{v}}{G(1+\mathbf{v})} x a_0^2 + \frac{\mathbf{v}}{2G} \left(x^2 - a^2 \right) b_0^2,$$

$$\frac{d}{dx}(v_1+v_2)=B+\frac{2-\mathbf{v}}{2G}\left(c_0^1+c_0^2+x\left(d_0^1+d_0^2\right)+\left(x^2-a^2\right)\left(g_0^1+g_0^2\right)\right).$$

З цих формул на основі (8), (13), (15)–(17) знаходимо значення коефіцієнтів несамозрівноважених частин зусиль (11)

$$a_0^1=\frac{E}{2a\mathbf{v}}u_1(a),\qquad a_0^2=\frac{E}{2a\mathbf{v}}\left(u_2(a)-u_2(-a)\right),$$

$$b_0^1=\frac{3G}{a^3\mathbf{v}}\left(au_1(a)-\int_{-a}^{a}u_1dx\right),\quad b_0^2=\frac{3G}{a^3\mathbf{v}}\left(a\left(u_2(a)+u_2(-a)\right)-\int_{-a}^{a}u_2dx\right),\tag{18}$$

$$c_0^i=d_0^i=0,\quad g_0^1=g_0^2=\frac{3G}{4a^3(2-\mathbf{v})}\left(2aB-v_2(a)+v_2(-a)\right),$$

а також умови для переміщень (5)

$$u_1(a)=u_2(a)-u_2(-a),\quad \frac{d}{dx}(v_1+v_2)\Big|_{x=a}=\frac{d}{dx}(v_1+v_2)\Big|_{x=-a}=B,$$

$$u_2(a)-u_1(a)+u_2(-a)=\frac{b^3(1-\mathbf{v})}{a^3(\mathbf{v}-2)}\left[v_2(a)-v_2(-a)\right]-2bB\frac{\left(a^2+b^2\right)(1-\mathbf{v})+a^2}{a^2(\mathbf{v}-2)},\tag{19}$$

$$\int_{-a}^{a}(u_2-u_1)dx=\frac{b^3(1-\mathbf{v})+a^2b\mathbf{v}}{a^2(\mathbf{v}-2)}\left[v_2(a)-v_2(-a)\right]+2bB\frac{b^2(\mathbf{v}-1)-2a^2}{a(\mathbf{v}-2)}.$$

Тут

$$B=\frac{1}{2a^3b\mathbf{v}}\left[\left(a^2+(1-\mathbf{v})\left(3b^2+a^2\right)\right)\left(au_1(a)-\int_{-a}^{a}u_1dx\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-a^2+(1-\mathbf{v})\left(3b^2-a^2\right)\right)\left(a\left(u_2(a)+u_2(-a)\right)-\int_{-a}^{a}u_2dx\right)\right].$$

Отже, отримані вирази (18) визначають коефіцієнти несамозрівноваженої частини зовнішніх зусиль (11), що дає змогу відшукати елементарні розв’язки задачі (1), (2), (6), (11) за формулами (13). Аналогічно будують самозрівноважені частини розв’язку.

4. ВИСНОВКИ

Отримані формули (18), а також аналогічні для коефіцієнтів самозрівноважених частин зусиль (11), наведених у вигляді розвинень (14), дають змогу побудувати розв’язок змішаної задачі пружності (1)–(6) на підставі розв’язку відповідної задачі в напруженнях (1), (2), (6), (11). Компоненти тензора напружень визначають у вигляді сум елементарних та самозрівноважених частин (12), які описують формулами (13). У цьому разі елементарний розв’язок σ_y^0 виражає сталий розтяг та чистий згин, а елементарна складова σ_{xy}^0 для дотичних напружень є поліномом другого степеня від координати x.

У випадку розв’язання задачі (1)–(6) запропонованим методом з’ясовано, що задані на межі області компоненти вектора переміщень (5) повинні задовольняти умови (19), які є наслідком необхідних умов рівноваги для відповідних зовнішніх зусиль.

Переміщення у прямокутній області за знайденими напруженнями чи деформаціями можна коректно визначити на підставі методики, яку описано в [9].

ЛІТЕРАТУРА

1. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.
3. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939.
4. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Необхідні умови для зовнішніх зусиль існування розв'язку плоскої задачі пружності в прямокутній області // Доп. НАН України. 2001. № 2. С. 48-55.
5. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Визначення розв'язку плоскої задачі пружності в прямокутній області у випадку ортотропного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2001. Т. 44. № 1. С. 97-102.
6. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2002. Т. 37. № 2. С. 61-66.
7. *Вігак В. М., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В.* Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. 1997. Т. 15. С. 11-27.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
9. *Вігак В. М., Ричагівський А. В.* Рівняння та інтегральні умови суцільності для плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла // Машинознавство. 2000. № 9. С. 8-11.
10. *Ігнатчук Д.* Власні функції компонент тензора напружень плоскої задачі термопружності в прямокутній області // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур. 2000. Т.1. С. 276-279.

NECESSARY CONDITIONS FOR DISPLACEMENTS OF EXISTING SOLUTION TO THE PLANE MIXED PROBLEM OF ELASTICITY IN A RECTANGLE

V. Vihak, **Yu. Tokovyi**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS Ukraine
Naukova str, 3-b, Lviv, 79053, e-mail: dept11@iapmm.lviv.ua

In this paper a method for reducing the solution of the plane mixed problem of elasticity in a rectangle to solving the corresponding elastic problem in terms of stresses is proposed. The necessary conditions for displacements at the boundary for the mixed problem are deduced on the basis of the existence conditions of the solution to the elastic problem in terms of stresses.

Key words: a displacement, stresses, strains

Стаття надійшла до редколегії 23.09.2002
Прийнята до друку 04.11.2003