ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ | VISNYK LVIV UNIV
Сер. прикл. матем. інформ. | Ser. Appl. Math. Comp. Sci.
2003. Вип. 7. С. 81-85 | 2003. No 7. P. 81-85

УДК 517.5

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ТЕЙЛОРА ДО ПОБУДОВИ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ

Т. Рвачова

Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського (ХАІ)
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, e-mail: k405@ai.kharkov.com
k405@d4.khai.edu

Одержано квадратурні формули на підставі узагальненого ряду Тейлора.
Ключові слова: базисні функції узагальненого ряду Тейлора, функція up(x).

1. ВСТУП

Наша мета – з'ясувати існування асимптотики при $n \to \infty$ для базисних функцій $\varphi_{n,k}$ узагальненого ряду Тейлора, що був запропонований В. О. Рвачовим у праці [1] (детальніше у [2]), і, скориставшись цим фактом, побудувати досконаліші квадратурні формули на підставі цього ряду.

Нехай

$$N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}-1, 2^{n-1}\}, n \neq 0; N_0 = \{-1,0,1\};$$

$$x_{n,k} = \{\frac{k}{2^{n-1}}\},\ n \neq 0, k \in N_n;\ x_{0,k} = \{k\},\ k \in N_0$$

У [2] доведено таке: якщо $f \in C^{\infty}[-1,1]$ і

$$\exists \rho \in [1,2) : \| f^{(k)} \|_{C[-1,1]} \leq c(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}},\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

то f розкладається в узагальнений ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x), \tag{2}$$

де базисні функції $\tilde{\varphi}_{n,k}(x)$ є скінченними лінійними комбінаціями зсувів функції $up(x)$:

$$\tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_l c_l^{(n,k)} up(x - l2^{-n})$$

і відіграють роль функцій x^n у звичайних рядах Тейлора. Функція

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

є розв'язком з компактним носієм рівняння

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Коефіцієнти $c_l^{(n,k)}$ знаходять з умов $\tilde{\varphi}_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = \delta_n^m \delta_k^s$.

Ряд (2) збігається на проміжку $[-1,1]$ рівномірно. Отже, за допомогою цього ряду можна побудувати квадратурні формули для заходження інтегралів від функцій, що задовольняють (1). Однак відшукання коефіцієнтів $c_l^{(n,k)}$ для великих n – технічно складний процес. З огляду на це буде корисною одержана нами асимптотика для певним чином нормованих базисних функцій $\widetilde{\varphi}_{n,k}$.

2. АСИМПТОТИКА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ТЕЙЛОРА

Ми будемо розглядати функції $\varphi_{n,k}$, що мають таке нормування:

$$\varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \delta_n^m \delta_k^s . \tag{3}$$

Покажемо спочатку, що існує асимптотика для функцій, що "відповідають" за точку 0, тобто для $\varphi_{n,0}$ (певним чином нормованих).

Будемо шукати $\varphi_{n,0}$ на $[-1,0]$ у вигляді

$$\varphi_{n,0}(x) = x_n up(x) + x_{n-1} up(x - \frac{1}{2}) + x_{n-2} up(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + ... + x_0 up(x - 1 + \frac{1}{2^n})$$

з невідомими коефіцієнтами. На проміжок $[0,1]$ функції $\varphi_{n,0}$ з парними номерами n продовжимо парно; з непарними номерами – непарно. За допомогою відомих властивостей функції $up(x)$ (див. [3]) можна перевірити, що умови (3) дають $n+1$ рівняння для знаходження коефіцієнтів $x_0,...,x_n$:

$$\begin{cases} x_0\alpha_0 = 1 \\ x_1\alpha_0 + x_0\alpha_1 = 0 \\ \quad ... \\ x_n\alpha_0 + x_{n-1}\alpha_1 + ... + x_0\alpha_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

де $\alpha_k = up(-1 + \frac{1}{2^k})$. Можна довести, що асимптотика для x_n має вигляд:

$$x_n = -\frac{\operatorname{Res}\limits_{\lambda} \frac{1}{\Phi(z)}}{\lambda^{n+1}} + u_n, \ | u_n | \le \frac{M}{6^n}, \tag{5}$$

де $\Phi(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$; λ - корінь функції $\Phi(z)$ ($\lambda \approx -3{,}2287$).

Розглянемо на $[-1,0]$ функцію:

$$ab(x) = up(x) + \lambda up(x - \frac{1}{2}) + \lambda^2 up(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + ... + \lambda^n up(x - 1 + \frac{1}{2^n}) + ...$$

Лема 1. Для будь-яких $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$ і $n \in N$

$$| ab(x) - \frac{1}{c_n}\varphi_{n,0}(x) | \le C \frac{n|\lambda|^n}{6^n}, \text{ де } c_n = -\frac{\operatorname{Res}\limits_{\lambda} \frac{1}{\Phi(z)}}{\lambda^{n+1}} .$$

Лему доводять безпосередньою оцінкою з урахуванням асимптотики (5) для x_n.

Лема 2. Для будь-яких $x \in [-\frac{1}{2^n};0]$ і $n \in N$ виконуються такі оцінки:

1) $|\frac{1}{c_n}\varphi_{n,0}(x)| \le C\frac{|\lambda|^n}{n!2^{\frac{n^2-n}{2}}}$;

2) $|ab(x)| \le \frac{c}{8^n}$.

Зазначимо, що функція $ab(x)$ задовольняє рівняння

$$ab'(x) = up'(x) + 2\lambda ab(2x),\ x \in [-1,0],$$

за допомогою якого можна одержати оцінку 2 для $|ab(x)|$. Нехай $ab_c(x)$ – це функція $ab(x)$, парно продовжена на проміжок $[-1,1]$, а $ab_s(x)$ - $ab(x)$, непарно продовжена на $[-1,1]$. Тоді виконується така теорема.

Теорема 1. *Функції* $\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,0}(x)$ *і* $\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,0}(x)$ *рівномірно при* $n \to \infty$ *збігаються на проміжку* $[-1,1]$ *відповідно до функцій* $ab_c(x)$ і $ab_s(x)$:

$$\|\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,0} - ab_c\|_{C[-1,1]} \to 0, n \to \infty;$$

$$\|\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,0} - ab_s\|_{C[-1,1]} \to 0, n \to \infty.$$

Твердження теореми безпосередньо випливає з лем 1 і 2. Справджується і загальніша теорема, для формулювання якої зручніше ввести інше позначення для базисних функцій $\varphi_{n,k}$. Нехай $\varphi_{n,\xi}(x)$, де $\xi \in \{x_{n,k}\}_{k \in N_n}$, є базисна функція, що “відповідає” за точку ξ, тобто

$$\varphi_{n,\xi}^{(m)}(x_{m,k}) = 0\ \forall m \in N,\ m \ne n, \forall k \in N_m;$$

$$\varphi_{n,\xi}^{(n)}(x_{n,k}) = 0 \forall x_{n,k} \ne \xi, \forall k \in N_n;$$

$$\varphi_{n,\xi}^{(n)}(\xi) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Тоді справджується така теорема.

Теорема 2. *Функції*

$$\Phi^c_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_c(x - \frac{p}{2^m}) - [ab_c(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_c(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) + ab_c(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)] -$$

$$-\frac{1}{2}[ab_c'(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,-1}(x) + ab_c'(-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,0}(x) + ab_c'(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,1}(x)] -$$

$$-\ldots-\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}}\sum_{l=-2^{m-1}}^{2^{m-1}} ab_c^{(m)}(\frac{l}{2^{m-1}} - \frac{p}{2^m})\varphi_{m,\frac{l}{2^{m-1}}}(x) \quad i$$

$$\Phi^{s}_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_s(x-\frac{p}{2^m}) - [ab_s(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_s(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) + ab_s(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)] -$$

$$-\frac{1}{2}[ab'_s(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,-1}(x) + ab'_s(-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,0}(x) + ab'_s(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{1,1}(x)] -$$

$$-\ldots-\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}}\sum_{l=-2^{m-1}}^{2^{m-1}} ab_s^{(m)}(\frac{l}{2^{m-1}}-\frac{p}{2^m})\varphi_{m,\frac{l}{2^{m-1}}}(x)$$

є асимптотиками відповідно для базисних функцій $\frac{1}{c_n}\varphi_{n,\frac{p}{2^m}}$ *з парними і непарними номерами*, *тобто*:

$$\| \Phi^{c}_{\frac{p}{2^m}} - \frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,\frac{p}{2^m}} \|_{C[-1,1]} \to 0,\ n\to\infty;$$

$$\| \Phi^{s}_{\frac{p}{2^m}} - \frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,\frac{p}{2^m}} \|_{C[-1,1]} \to 0,\ n\to\infty.$$

3. КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА

Припустимо, необхідно обчислити інтеграл від 0 до 1 від функції, що задовольняє умови (1). Тоді можна побудувати квадратурну формулу на підставі узагальненого ряду Тейлора [4]:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{m}\sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})a_{n,k} + R_m,\ \text{ де }\ a_{n,k} = \int_0^1 \tilde{\varphi}_{n,k}(x)dx\,.$$

Якщо, наприклад, функція $f(x)$ належить до класу Жеврея, тобто

$$\| f^{(n)} \|_C \le C(f)n^{\alpha n}, \alpha > 1\,,$$

то вона задовольняє умови (1). У цьому разі отримана нами оцінка для R_m має вигляд

$$|R_m| \le C(f)\frac{m^{\alpha m}}{2^{(m+1)m/2}}\,.$$

4. ВИСНОВКИ

Побудова базисних функцій з великими номерами для узагальненого ряду Тейлора потребує складних обчислень. Отже, для використання наведеної вище квадратурної формули з достатньо велиою кількістю членів зручніше скористатися одержаними асимптотиками.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Рвачев В.А.* Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций // Мат. методы анализа динамических систем.1982. Вып. 6. С. 99-102.
2. *Рвачев В.А.* Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Успехи матем. наук. 1990. Т. 45. Вып. 1 (271). С. 77-103.
3. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1986.

4. *Ярмолюк В.К.* О применении обобщенных рядов Тейпора для приближенного вычисления интегралов // Мат. методы анализа динамических систем. 1983. Вып. 7. С. 48-50.

ON THE APPLICATION OF THE GENERALIZED TAYLOR SERIES FOR THE CONSTRUCTION OF QUADRATURE FORMULAS

T. Rvachova

M. Ye. Zhukovsky National AeronauticalUniversity
Chkalova str, 17, Kharkiv, 61070, e-mail: k405@ai.kharkov.com
k405@d4.khai.edu

The quadrature formulas on the base of the generalized Taylor series are obtained.

Key words: basic functions of the generalized Taylor series, function up(x)

Стаття надійшла до редколегії 26.09.2002
Прийнята до друку 28.10.2003