ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2003. Вип. 6. С. 178-181 *2003. No 6. P. 178-181*

УДК 519.68

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕОМ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

Р.Тичковський, Г.Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Побудовано математичну модель оптимального використання потужностей ЕОМ в обчислювальній мережі. За критерій оптимальності вибрано сумарний час розв'язування задач. Отримана математична модель зводиться до узагальненої задачі про призначення. Для реалізації цієї моделі запропоновано евристичний алгоритм.

Ключові слова: математичне моделювання, розподілене розв'язування задач, евристичний алгоритм

1. ВСТУП

Однією з головних проблем проектування і реалізації систем розподіленої обробки інформації є проблема оптимального розподілу інформаційних ресурсів серед вузлів обчислювальної мережі (ОМ) [1,2]. Однак експлуатація ОМ може передбачати не тільки доступ користувачів до інформаційних ресурсів кожного вузла, а й можливість використання потужностей ЕОМ у будь-якому вузлі. З огляду на це виникає проблема побудови математичних моделей оптимального (з погляду певного критерію) використання потужностей ЕОМ в ОМ і методів їхньої реалізації. Саме побудові таких математичних моделей та методам їхньої реалізації і присвячена наша праця.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай n – кількість вузлів ОМ; m – кількість різних задач, призначених до розв'язування; K_j – j-й вузол ОМ; Z_i – i-та задача; t_{ij} – час виконання задачі Z_i на ЕОМ вузла K_j; t_j – час, протягом якого можна використати ЕОМ вузла K_j.

Треба так розподілити задачі між ЕОМ у мережі, щоб сумарний час розв'язування задач був мінімальний.

3. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Уведемо змінні

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо задача } Z_i \text{ розв'язується на ЕОМ вузла } K_j; \\ 0, \text{ у противному випадку.} \end{cases}$$

Тоді математичну модель можна записати у такому вигляді:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \le t_j \quad (j = 1,2,...,n); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,...,m); \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0 \cup 1\} \; (i = 1,2,...,m; \;\; j = 1,2,...,n). \tag{4}$$

У цьому випадку цільова функція (1) виражає сумарний час, необхідний для розв'язування задач; ліва частина нерівності (2) становить час, протягом якого використовується ЕОМ вузла K_j; умова (3) означає, що кожна задача Z_i розв'язується на ЕОМ одного з вузлів.

Для реалізації математичної моделі використано евристичний алгоритм.

4. ЕВРИСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Зазначимо спочатку, таке: якщо сумарний час призначених для розв'язування на ЕОМ задач в окремому вузлі є більший ніж час, протягом якого можна використати ЕОМ цього вузла, то такий вузол будемо називати переповненим.

Евристичний алгоритм, який пропонуємо використати для реалізації математичної моделі, складається з двох етапів. На першому етапі знаходимо початковий розподіл задач між вузлами. Цей розподіл буде завжди оптимальним, якщо не враховувати умову (2). На другому виконуємо перерозподіл задач, якщо для початкового розподілу існує хоча б один індекс *r* такий, що умова (2) не виконується. Другий етап складається з низки кроків, причому на кожному кроці відбувається перерозподіл однієї задачі з переповненого вузла так, щоб досягти мінімального збільшення значення цільової функції. Другий етап алгоритму виконуємо доти, доки не буде знайдено розподіл, який задовольняє умову (2). Опишемо обидва етапи алгоритму.

Перший етап. Знаходження початкового розподілу.

1. Для всіх $i \, (i = 1,2,...,m)$ визначаємо $\min\limits_{1 \le s \le n} t_{is}$. Нехай $\min\limits_{1 \le s \le n} t_{is} = t_{is_i} \quad (i = 1,2,...,m)$.

2. Знаходимо початковий розподіл задач, тобто визначаємо матрицю $X = \lfloor x_{ij} \rfloor_{m,n}$, де

$$x_{is_i} = 1 \;\; (i = 1, 2, ..., m);$$

$$x_{is} = 0 \;\; (i = 1, 2, ..., m; s = 1, 2, ..., n; (i, s) \ne (i, s_i)).$$

Розподіл X завжди буде оптимальним, якщо не враховувати умову (2).

Другий етап. Перерозподіл задач між вузлами.

1. Формуємо вектор ознак $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$, де $e_j = 0 \;\; (j = 1, 2, ..., n)$. Елементи вектора ознак, які будуть дорівнювати 0, визначатимуть ті стовпці матриці *X*, елементи яких можна змінювати, а елементи вектора ознак, які будуть дорівнювати 1, визначатимуть ті стовпці матриці X, які на далі змінюватись не будуть. Якщо деякий вузол переповнений, то в процесі роботи алгоритму відбувається перерозподіл задач із цього вузла в інші. Після перерозподілу відповідному елементу e_j вектора *E* присвоюємо значення 1 і вузол вважаємо закритим для перерозподілу.

2. Для всіх індексів j, таких що $e_j = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$, перевіряємо виконання умови (2). Якщо ця умова для всіх j виконується, то на цьому робота алгоритму завершується. Розподіл X є оптимальний. Якщо для деякого індексу $j=r$ умова (2) не виконується, то переходимо до пункту 3.

3. Для кожного i, для якого $x_{ir} = 1$, знаходимо $\min\limits_{s}\left(t_{is} - t_{ir}\right)$, де мінімум беремо по тих індексах $s \neq r$, для яких $e_s = 0$. Нехай $\min\limits_{s}\left(t_{is} - t_{ir}\right) = t_{is_i} - t_{ir}$.

Після цього знаходимо $\min\limits_{i}\left(t_{is_i} - t_{ir}\right)$, де мінімум беремо по тих індексах i, для яких $x_{ir} = 1$. Нехай $\min\limits_{i:x_{ir}=1}\left(t_{is_i} - t_{ir}\right) = t_{qs_q} - t_{qr}$. Тоді в матриці X приймаємо $x_{qs_q} = 1,\ x_{qr} = 0.$ Це означає, що задача Z_q із вузла K_r перерозподілена у вузол K_{s_q}. Такому перерозподілу відповідає мінімальне збільшення цільової функції.

4. Превіряємо умову (2) для $j=r$. Якщо вона не виконується, то переходимо до пункту 3. Якщо умова виконується, то вузол вважаємо закритим для перерозподілу задач і переходимо до пункту 5.

5. Для всіх j, для яких $e_j = 0$, перевіряємо виконання умови (2). Якщо для всіх таких j умова виконується, то на цьому робота алгоритму завершується. Розподіл X приймаємо за розв'язок задачі. Якщо для деякого індексу $j=r$ умова (2) не виконується, то переходимо до пункту 3.

Отже, алгоритм дає змогу за скінченну кількість кроків знайти оптимальний або майже оптимальний розподіл задач між вузлами в обчислювальній мережі. Результатом роботи алгоритму є матриця X.

Зазначимо таке: якщо m означає кількість типів задач, а m_i – кількість задач i-го типу, то математична модель оптимального розподілу задач серед вузлів ОМ буде мати вигляд

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \le t_j \quad (j = 1,2,\ldots,n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = m_i \quad (i = 1,2,\ldots,m);$$

$$x_{ij} \in \{1, 2, \ldots, m_i\} \ (i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n),$$

де x_{ij} – кількість задач i-го типу, які планують розв'язати на ЕОМ вузла K_j.

5. ВИСНОВКИ

Отже, наведено математичну модель оптимального розподілу задач серед ЕОМ вузлів обчислювальної мережі. За критерій оптимальності вибрано сумарний час розв'язування задач. Математичною моделлю задачі є узагальнена задача про призначення, для розв'язування якої запропоновано евристичний алгоритм. Цей алгоритм дає змогу за скінченну кількість кроків знайти оптимальний або майже оптимальний розподіл задач серед вузлів ОМ. Недоліком алгоритму є те, що він не дає гарантії отримання оптимального розподілу в разі розв'язування задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Демидович О.В.* Математичні моделі оптимального розподілу інформаційних ресурсів серед вузлів обчислювальних мереж і методи їх реалізації: Автореф. дис. "Математичні моделі оптимального розподілу інформаційних ресірсів серед вузлів обчислювальних мереж та методи їх реалізації" канд. техн. наук. Львів, 2001.
2. *Цегелик Г.Г.* Системы распределённых баз даных. Львов: Свит, 1990.

THE MATHEMATICAL MODELING OF OPTIMAL USING PERFORMANCE OF COMPUTERS IN COMPUTING NETWORKS

R.Tychkovskiy, G.Tsegelyk

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

The mathematical model of optimal using performance of computers in computing networks is made. The total time of solving tasks is choosen for criterion of optimality. The obtained mathematical model reduced to the generalized assignment problem. The heuristic algorithm is proposed for realization this model.

Key words: mathematical modeling, distributed solving a tasks, heuristic algorithm

Стаття надійшла до редколегії 15.10.2002
Прийнята до друку 16.04.2003