ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2002. Вип. 5. С. 131-135 *2002. No 5. P. 131-135*

УДК 536.2

МОДЕЛЬ ЕФЕКТИВНОГО ТЕПЛОВОГО ДЖЕРЕЛА ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА, ЯКЕ ОПРОМІНЮЮТЬ КОНЦЕНТРОВАНИМ ПОТОКОМ ЕНЕРГІЇ

І. Махоркін[*]**, А. Сеник**[**]

[*]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім.Я.С.Підстригача НАН України,
вул.Наукова,3 б, м.Львів, 79000, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua
[**]*Національний університет "Львівська політехніка",*
вул.Ст.Бандери, 12, м.Львів, 79013, e-mail:asen@litech. lviv.ua

Запропоновано математичну модель нагрівання-охолодження циліндричних тіл у разі їхнього опромінення концентрованим потоком енергії (КПЕ). Модель враховує локальність та режим дії КПЕ, форму плями опромінення та траєкторію її поступального руху, габарити виробу й анізотропію матеріалу, умови теплообміну. З використанням методу миттєвих джерел та методів інтегральних перетворень отримано аналітичний опис температурного поля, зумовленого опроміненням поверхні рухомим нормально розподіленим потоком енергії.

Ключові слова: модель ефективного теплового джерела; концентровані потоки енергії; задача нестаціонарної теплопровідності; ортотропне тіло.

Застосування концентрованих потоків енергії (КПЕ), зокрема, лазерного та електронного випромінювання, потоків іонів тощо, в наукових і технологічних цілях потребують досліджень можливості отримання бажаних фізичних та фізико-хімічних ефектів. Їх, як звичайно, виконують за допомогою методів, які грунтуються на концепції, що температурне поле є єдиною незалежною характеристикою процесу [5], через яку визначаються всі інші характеристики, і виконують це в два етапи.

На першому етапі, з огляду на значні труднощі експериментального визначення параметрів температурного поля в технологічній зоні, будують математичну модель ефективного теплового джерела (формулюють відповідну крайову задачу теплопровідності), параметрами якого є теплофізичні та геометричні характеристики об'єкта, характеристики технологічного процесу та КПЕ, і визначають температурне поле. На другому етапі температурне поле вважають відомим і за його параметрами розраховують усі інші процеси .

Ми пропонуємо модель ефективного теплового джерела для довгого циліндричного тіла, яке опромінюють КПЕ, на основі якої отримано аналітичний опис температурного поля, що в цьому разі виникає.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай зовнішня поверхня $(r = R_+)$ довгого порожнистого циліндра перебуває в умовах конвективного теплообміну з середовищем температури $t_c = \text{const}$, і її опромінюють рухомим потоком КПЕ, вісь якого нормальна до поверхні, а його питома потужність розподілена по перерізу променя згідно з нормальним законом Гаусса [4], який у циліндричній системі координат має вигляд

$$q = \frac{Q\sqrt{k_\theta k_z}}{\pi}\exp\left\{-\left[k_\theta r^2 \sin^2\left(\theta - \theta_c(\tau)\right) + k_z\left(z - z_c(\tau)\right)^2\right]\right\} .$$

Уважаємо, що матеріал циліндра є непрозорим щодо опромінення і має циліндричну теплову ортотропію, вісь якої збігається з віссю циліндра. Початкова температура системи та температура внутрішньої поверхні $(r = R_-)$, упродовж усього процесу дорівнює температурі навколишнього середовища t_c.

2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕФЕКТИВНОГО ТЕПЛОВОГО ДЖЕРЕЛА

У праці [4] показано, що задачі нагрівання непрозорих матеріалів КПЕ, час дії яких понад 10^{-9} с. а густина потужності не перевершує 10^9 вт/см^2, правомірно розглядати на основі класичних співвідношень теплопровідності, моделюючи їхню дію поверхневим джерелом (зовнішнім тепловим потоком) тепла.

Якщо не враховувати впливу фазових та структурних перетворень на тепловий стан і нехтувати термочутливістю (залежністю теплофізичних характеристик від температури) матеріалу, то математичною моделлю ефективного теплового джерела буде наступна крайова задача теплопровідності

$$\frac{\lambda_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\lambda_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \lambda_z\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = c_v\frac{\partial t}{\partial \tau} ; \tag{1}$$

$$\left.\left(\alpha t + \lambda_r\frac{\partial t}{\partial r}\right)\right|_{r=R_+} = \alpha t_c + (1-\gamma)\frac{Q\sqrt{k_\theta k_z}}{\pi}\times$$
$$\times\exp\left\{-\left[k_\theta R_+^2\sin^2(\theta-\theta_c(\tau)) + k_z(z - z_c(\tau))^2\right]\right\}\cos(\theta-\theta_c(\tau))S_+\left[\cos(\theta-\theta_c(\tau))\right]N(\tau); \tag{2}$$

$$t|_{r=R_-} = t|_{|z|\to\infty} = t|_{\tau=0} = t_c . \tag{3}$$

Тут Q – потужність випромінювання; γ – коефіцієнт відбиття випромінювання поверхнею; k_θ, k_z – коефіцієнти зосередженості випромінювання; $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_z$ – головні коефіцієнти теплопровідності [1] в циліндричній системі координат (r, θ, z), вісь z якої збігається з віссю ортотропії матеріалу; c_v – об'ємна теплоємність матеріалу, α – коефіцієнт теплообміну; $\{\theta_c = \theta_c(\tau), z = z_c(\tau)\}$ – параметричні рівняння траєкторії руху центра плями нагрівання по зовнішній поверхні циліндра; $N(\tau)$ – функція, що описує часову структуру опромінення.

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Неважко пересвідчитись, що роз'язком задачі (1)-(3) є вираз

$$t = t_c + \int_0^\tau T^*(r,\theta,z,\tau,\eta)N(\eta)d\eta , \tag{4}$$

де функція $T^*(r,\theta,z,\tau,\eta)$ задовольняє рівняння (1) та крайові умови

$$\left.\left(\alpha T^* + \lambda_r \frac{\partial T^*}{\partial r}\right)\right|_{r=R_+} = (1-\gamma)\frac{Q\sqrt{k_\theta k_z}}{\pi}\cos\left(\theta-\theta_c(\eta)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\left[k_\theta R_+^2\sin^2\left(\theta-\theta_c(\eta)\right)+k_z\left(z-z_c(\eta)\right)^2\right]\right\}S_+\left[\cos\left(\theta-\theta_c(\eta)\right)\right]\delta_+(\tau-\eta); \qquad (5)$$

$$\left.T^*\right|_{r=R_-} = \left.T^*\right|_{|z|\to\infty} = \left.T^*\right|_{\tau=\eta} = 0\,. \qquad (6)$$

Тут $\delta_+(\varsigma) = S'_+(\varsigma)$ - функція Дірака; $S_+(\xi) = \{1, \xi > 0; 0, \xi \le 0\}$ - асиметрична одинична функція.

Користуючись інтегральними перетвореннями [2] :

Лапласа $\tilde{T}^* = \int\limits_0^\infty T^* \exp(-s\tau_*)d\tau_* \;\Leftrightarrow\; T^* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{T}^*\exp(s\tau_*)ds$, за змінною $\tau_* = \tau - \eta$;

Фур'є $\tilde{\tilde{T}}_n^* = \int\limits_0^{2\pi}\cos n\theta_* \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{T}^*\exp(i\xi z_*)dz_* d\theta_* \Leftrightarrow \tilde{T}^* = \frac{1}{2\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{T}}_n^*\exp(-i\xi z_*)d\xi\right]\cos n\theta_*$,

за змінними $z_* = \left(z - z_c(\eta)\right)/\sqrt{l_z}$ та $\theta_* = \theta - \theta_*(\eta)$;

розв'язок задачі теплопровідності (1),(5),(6) запишемо у вигляді

$$T^* = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n a_n\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(r,\xi,\tau_*)\exp(-i\xi z_*)d\xi\right]\cos n\theta_*\,, \qquad (7)$$

де
$$F(r,\xi,\tau_*) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{A(\xi)L_{n0}(\kappa r)\exp(s\tau_*)ds}{\left(\alpha+\frac{\lambda_r\nu}{R_+}\right)L_{n0}(\kappa R_+)+\lambda_r\kappa L_{n1}(\kappa R_+)};$$

$$A(\xi) = q^*\sqrt{\frac{\pi}{l_z k_z}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4l_z k_z}\right),\; q^* = (1-\gamma)Q\sqrt{k_\theta k_z}\,/\pi;$$

$$L_{nj}(\varsigma) = (-1)^j I_\nu(\kappa R_-)K_{\nu+j}(\varsigma) - K_\nu(\kappa R_-)I_{\nu+j}(\varsigma),\;(j=0;1),\;\kappa = \sqrt{\xi^2 + s/a},\;\nu = n\sqrt{l_\theta};$$

$$l_z = \lambda_z/\lambda_r\,,\; l_\theta = \lambda_\theta/\lambda_r\,,\; a = \lambda_r / c_v;$$

$$a_n = 2\int\limits_0^{\pi/2}\exp\left(-k_\theta R_+^2\sin^2\theta_*\right)\cos\theta_*\cos n\theta_* d\theta_*\,,\; \varepsilon_n = \{1/2, n=0; 1, n\ne 0\};$$

$I_\nu(\varsigma), K_\nu(\varsigma)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду.

З використанням теореми розкладу [1] та довідкових даних [3] співвідношення (7) запишемо так:

$$T^*(r,\theta,z,\tau,\eta)=\frac{2(1-\gamma)aQR_+\sqrt{k_\theta k_z}S_+(\tau-\eta)}{\lambda_r\pi^2\sqrt{4al_zk_z(\tau-\eta)+1}}\exp\left\{-\frac{k_z[z-z_c(\eta)]^2}{4al_zk_z(\tau-\eta)+1}\right\}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n a_n\cos n(\theta-\theta(\eta))\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_{ni}^2\Re_{n\sqrt{l_\theta}}(\mu_{ni}r)}{\Psi^*_{n\sqrt{l_\theta}}(\mu_{ni})}\exp\{-a\mu_{ni}^2(\tau-\eta)\},\tag{8}$$

де μ_{ni} , $\left(n=\overline{0,\infty};i=\overline{1,\infty}\right)$ - додатні корені характеристичного рівняння

$$\left(\frac{n\sqrt{l_\theta}\lambda_r}{R_+}+\alpha\right)\Re_{n\sqrt{l_\theta}}(\mu R_+)-\lambda_r\mu\Re^-_{n\sqrt{l_\theta}+1}(\mu R_+)=0\,.$$

Тут
$$\Re_\nu(\mu\xi)=J_\nu(\mu R_-)Y_\nu(\mu\xi)-J_\nu(\mu\xi)Y_\nu(\mu R_-)\,;$$
$$\Re^\pm_\nu(\mu\xi)=J_{\nu\pm1}(\mu R_-)Y_\nu(\mu\xi)-J_\nu(\mu\xi)Y_{\nu\pm1}(\mu R_-)\,;$$
$$\Psi^*_\nu(\mu)=\frac{\mu}{\lambda_r}\left\{\left(\alpha+\frac{\nu\lambda_r}{R_+}\right)\Re^+_\nu(\mu R_+)-\lambda_r\mu\Re_{\nu+1}(\mu R_+)\right\}R_-R_+-$$
$$-\left(\nu^2-\mu^2R_+^2-\frac{\alpha^2R_+^2}{\lambda_r^2}\right)\Re_\nu(\mu R_+);$$

$J_\nu(\varsigma)\,,Y_\nu(\varsigma)$ – функції Бесселя першого та другого роду.

Підставимо вираз (8) в співвідношення (4) та виконаємо інтегрування з урахуванням того, що у практично цікавих випадках [4] $N(\tau)=S_+(\tau)-S_+(\tau-\tau_0^*)$, ($\tau_0^*$ – час опромінення) отримуємо таке співвідношення для визначення температурного поля:

$$t=t_c+\frac{2(1-\gamma)aQR_+\sqrt{k_\theta k_z}}{\lambda_r\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n a_n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_{ni}^2\Re_{n\sqrt{l_\theta}}(\mu_{ni}r)}{\Psi^*_{n\sqrt{l_\theta}}(\mu_{ni})}\times$$
$$\times\left\{N(\tau)\int_0^\tau F_{ni}(\theta,z,\eta,\tau)d\eta+S_+(\tau-\tau_0^*)\int_0^{\tau_0^*}F_{ni}(\theta,z,\eta,\tau)d\eta\right\},\tag{9}$$

де
$$F_{ni}(\theta,z,\eta,\tau)=\frac{\cos n(\theta-\theta_c(\eta))}{\sqrt{4al_zk_z(\tau-\eta)+1}}\exp\left\{-a\mu_{ni}^2(\tau-\eta)-\frac{k_z[z-z_c(\eta)]^2}{4al_zk_z(\tau-\eta)+1}\right\}.\tag{10}$$

Приймаючи в (9) $l_z=l_\theta=1$ ($\lambda_r=\lambda_\theta=\lambda_z=\lambda$), отримуємо співвідношення для визначення температурного поля циліндра з ізотропного матеріалу.

4. ВИСНОВКИ

Розглянута модель ефективного теплового джерела дала змогу: комплексно врахувавати, на відміну від [4], локальність та режим дії КПЕ, форму плями нагрівання та траєкторію її поступального руху, габарити виробу та анізотропію його матеріалу, умови теплообміну з зовнішнім середовищем; з використанням методу миттєвих джерел та методів інтегральних перетворень аналітично визначити просторове нестаціонарне температурне поле циліндричного тіла, яке опромінюють КПЕ. Отриманий аналітичний вираз дозволяє побудувати прозорий алгоритм числового дослідження параметрів температурного поля залежно від згаданих вище параметрів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Беляев Н.М. Рядно А.А.* Методы теплопроводности: Учебное пособие для втузов. В 2 ч. Ч.1. -М: Высшая школа, 1982. -327 с.
2. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сум, рядов и произведений. -М.: Наука, 1971. -1108 с.
4. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов:Справочник/ Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, И.В. Зуев, А.Н. Кокора. -М.: Машиностроение, 1985. – 496 с.
5. Предисловие // Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. -М.: Наука, 1985, с.3-4.

MODEL OF EFFICIENT HEAT SOURCE FOR AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL BODY, IRRADIATED BY CONCENTRATED ENTRGY FLOW

I. Makhorkin[*], A. Senyk[**]

[*]*Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics*
NAS of Ukraine
Naukova str., 3b, L'viv, 79000, e-mail:dept19@iapmm.lviv.ua
[**]*L'viv politchnik national university*
St.Bandera str., 12, L'viv, 79013, e-mail: asen@litech. lviv.ua

A mathematical model for heating-cooling of cylindrical bodies, irradiated by concentrated energy flow (CEF), is proposed. The model cosiders the locality and regime of CEF action, irradiation spots and trajectory of its translational movement, gabarites of a product and material anisotropy, and heat exchange conditions. Analitical description of a temperature field, caused by irradiation of the surface by a moving normally distributed energy flow and convective heat excharge, is obtained using the method of instanteneous sources and methods of integral transformations.

Key words: a model of efficient heat source, concentrated energy flowes, problem of non stationary heat conduction, orthotropyc body.

Стаття надійшла до редколегії 23.10.2001
Прийнята до друку 11.06.2002