

УДК 519.6:539.3

ГІБРИДНІ СКІНЧЕННО-ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНІ АПРОКСИМАЦІЇ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

І. Дияк, Т. Березюк

*Львівський національний університет імені Івана Франка
кафедра прикладної математики
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: dyyak@franko.lviv.ua*

Побудована гетерогенна чисельна схема для розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності з використанням методу скінченних і граничних елементів на основі альтернуючого методу Шварца. Запропонований вибір параметра релаксації для прискорення ітераційного процесу. Наведені результати чисельного експерименту для модельної задачі.

Ключові слова: метод декомпозиції області, метод Шварца, метод скінченних елементів, непрямий метод граничних елементів

1. ВСТУП

Останнім десятиліттям значний інтерес у галузі розробки ефективних чисельних схем становить розвиток методу Шварца та інших методів декомпозиції області (МДО) для розв'язування диференціальних рівнянь у часткових похідних. Ці методи, які за природою є паралельними алгоритмами, мають значний потенціал у поліпшенні чисельного моделювання задач механіки з використанням багатопроцесорних ЕОМ. Вони дають змогу звести розв'язування задач у складних областях до розв'язування послідовності задач у простіших підобластях. У кожній з підобластей можна використати метод, близький до оптимального з урахуванням специфіки задачі для цієї підобласті. Відомо, що методи декомпозиції області можна розділити на методи, що потребують існування непорожнього перетину підобластей – методи Шварца (Schwarz)[6], та методи, які потребують лише існування спільної межі підобластей – методи доповнення Щура (Schur) [10].

Для розв'язування задач осесиметричної теорії пружності ми запропонували чисельну схему, що ґрунтується на гібридних апроксимаціях непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) та методу скінченних елементів (МСЕ). Ця чисельна схема побудована на основі альтернуючого методу Шварца. На відміну від розвинутих у [2,4] підходів, це пов'язане з використанням НМГЕ, у якому шуканими величинами є значення густини потенціалу. Відомо, що точність обчислення переміщень і напружень у разі застосування МГЕ зменшується з наближенням до межі області [1]. Хоча у випадку використання альтернуючого методу Шварца порівняно з методами доповнення кількість обчислень на кожній ітерації більша, питання ефективності гетерогенних чисельних апроксимацій не з'ясоване [8].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай просторове, однорідне, ізотропне, пружне тіло, утворене обертанням навколо осі z плоскої зв'язної фігури $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (меридіонального перерізу), деформується під дією осесиметричних поверхневих і масових сил. Тоді напружено-

деформований стан цього тіла описує система диференціальних рівнянь еліптичного типу [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{\varphi\varphi} + F_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + F_z = 0. \end{cases} \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

У кожній точці $P(r, z)$ меридіонального контуру $\Gamma = \partial\Omega$ тіла задаємо будь-які дві з таких чотирьох умов:

$$u_i(P) = g_i(P); \quad (2)$$

$$t_i(P) = \sigma_{ij}(P)n_j(P) = h_i(P); \quad i, j = r, z, (r, z) \in \Gamma, \quad (3)$$

де $t_i(P)$ – проекція вектора зусиль, $g_i(P)$ та $h_i(P)$ – задані на Γ функції, $n_j(P)$ – компоненти зовнішньої нормалі \vec{n} до контуру Γ у точці $P = P(r, z)$, $i = r, z$.

Між деформаціями та напруженнями виконуються співвідношення закону Гука:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а між переміщеннями та деформаціями – співвідношення Коші:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де F_r і F_z – проекції масових сил на координатні осі; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

3. АЛЬТЕРНУВАЛЬНИЙ МЕТОД ШВАРЦА

Запишемо осесиметричну задачу теорії пружності (1) – (5) в операторному вигляді:

$$\begin{aligned} Lu &= F, \quad x \in \Omega, \\ u &= \bar{u}, \quad x \in \Gamma^1, \\ t &= \bar{t}, \quad x \in \Gamma^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$, і $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$.

Зобразимо область Ω у вигляді: $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_B$, щоб $\Omega_F \cap \Omega_B \neq \emptyset$.

Нехай

$$\begin{aligned}
\Gamma_B^1 &= \Gamma^1 \cap \partial\Omega_B, & \Gamma_B^2 &= \Gamma^2 \cap \partial\Omega_B; \\
\Gamma_F^1 &= \Gamma^1 \cap \partial\Omega_F, & \Gamma_F^2 &= \Gamma^2 \cap \partial\Omega_F; \\
\Gamma_F^C &= \partial\Omega_F \setminus (\Gamma_F^1 \cup \Gamma_F^2), & \Gamma_B^C &= \partial\Omega_B \setminus (\Gamma_B^1 \cup \Gamma_B^2)
\end{aligned} \tag{7}$$

(див. рис. 1).

Метод декомпозиції області полягає в зведенні розв'язування початкової задачі до розв'язування послідовності задач у підобластях, у нашому випадкові Ω_F і Ω_B . У підобласті Ω_F розв'язок шукатимемо методом скінченних елементів [3], а в підобласті Ω_B – непрямым методом граничних елементів [4].

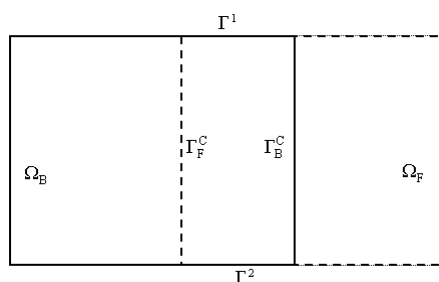


Рис. 1

Ітераційний процес альтернуального методу Шварца можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
Lu_F^k &= F, & x \in \Omega_F; \\
u_F^k &= \bar{u}, & x \in \Gamma_F^1; \\
t_F^k &= \bar{t}, & x \in \Gamma_F^2; \\
u_F^k &= u_B^{k-1}, & x \in \Gamma_F^C;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
L\phi_B^k &= F, & x \in \Omega_B; \\
u_B^k &= \bar{u}, & x \in \Gamma_B^1; \\
t_B^k &= \bar{t}, & x \in \Gamma_B^2; \\
u_B^k &= u_F^k, & x \in \Gamma_B^C;
\end{aligned} \tag{9}$$

де

$$u_B^0 = \bar{u}_B, \quad x \in \Gamma_F^C. \tag{10}$$

Отже, спочатку розв'язуємо задачу в підобласті Ω_F методом скінченних елементів із заданими вихідними граничними умовами на Γ_F^1 і Γ_F^2 (8) та початковим наближенням переміщень u_B^0 на Γ_F^C (10). Далі розв'язуємо задачу в підобласті Ω_B непрямым методом граничних елементів із заданими вихідними граничними умовами на границях Γ_B^1 і Γ_B^2 та отриманими на цій же ітерації переміщеннями на границі Γ_B^C з МСЕ (9).

На наступних ітераціях для МСЕ граничними значеннями є задані вихідні граничні значення на границях Γ_F^1 і Γ_F^2 та переміщення на границі Γ_F^C , отримані НМГЕ на попередній ітерації. Для НМГЕ граничними значеннями є вихідні граничні значення на границях Γ_B^1 і Γ_B^2 та переміщення на границі Γ_B^C , отримані на цій же ітерації МСЕ.

Для ітераційного процесу ми вибрали такий критерій зупинки:

$$\|u_F^{k+1} - u_F^k\| + \|\phi_B^{k+1} - \phi_B^k\| \leq \varepsilon (\|u_F^k\| + \|\phi_B^k\|). \quad (11)$$

У разі розв'язування задач МСЕ використано білінійні та біквадратичні апроксимації переміщень на сирендипових чотирикутниках, а у випадку НМГЕ – лінійні та квадратичні апроксимації густини розподілу поверхневих сил, відповідно. Вузли дискретизації у скінченно- та граничноелементних апроксимаціях на межі Γ_B^C – збігалися, хоча таке обмеження не є обов'язковим.

4. РЕГУЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗБІЖНОСТІ

З метою регулювання процесу збіжності для знаходження u_B^k на поверхні Γ_B^C використано коефіцієнт релаксації ω , так що u_B^k подавали у вигляді аналогічному до [9]:

$$u_B^k = \omega u_F^k + (1 - \omega) u_B^{k-1}, \quad x \in \Gamma_B^C. \quad (12)$$

У цьому випадку при $\omega = 1$ маємо класичний альтернувальний метод Шварца.

Оптимальний коефіцієнт вибирали з умови:

$$F = \|u_B^{k+1} - u_B^k\|_{L_2(\Gamma_B^C)}^2 \longrightarrow \min. \quad (13)$$

Можна довести, що оптимальне значення коефіцієнта релаксації в цьому разі буде

$$\omega = \frac{(e_B^k, e_B^k - e_F^{k+1})}{\|e_F^{k+1} - e_B^k\|^2}, \quad (14)$$

тут введені позначення

$$\begin{aligned} e_F^{k+1} &= u_F^{k+1} - u_F^k, \\ e_B^k &= u_B^k - u_B^{k-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Наведемо результати апробації запропонованого підходу для дослідження осесиметричного напружено-деформованого стану нескінченного порожнистого циліндра під дією рівномірного внутрішнього тиску (рис. 2).

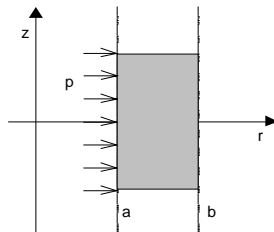


Рис. 2

Для цієї задачі відомий аналітичний розв'язок [7]. Задачу розв'язували за таких значень параметрів: $p = 1$ Па, $a = 1$ м, $b = 2$ м, модуль зсуву $\mu = 0.7$ Па, а коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

У запропонованому підході за область Ω_F вибрано внутрішню частину циліндра від внутрішньої поверхні до поверхні $r = 1.6$, область Ω_B – зовнішня частина від зовнішньої поверхні до поверхні $r = 1.4$. По осі z області розбивали на чотири чотирикутні скінченні елементи з білінійною апроксимацією переміщень і чотири граничні елементи з лінійною апроксимацією густини розподілу поверхневих сил, відповідно. По осі r область Ω_F розбивали на шість скінченних елементів, а область Ω_B розбивали на шість граничних елементів. Спільна зона була в межах від $r = 1.4$ до $r = 1.6$ і по осі r складалася з двох скінченних елементів. Вузли дискретизації цих обох областей збігалися.

Таблиця 1.

Значення ε	Кількість ітерацій	Час обчислень, хв
10^{-1}	8	1
10^{-2}	29	4
10^{-3}	57	8

У табл. 1 наведено кількість виконаних ітерацій та час обчислення задачі на ПЕОМ залежно від значення параметра ε у формулі (11).

На рис. 3 показано графіки отриманих значень переміщень u_r/a при $z = 0$. Зображені аналітичний розв'язок задачі (крива 1) та отримані переміщення u_r при $\varepsilon = 10^{-1}$ (крива 4), $\varepsilon = 10^{-2}$ (крива 3) та $\varepsilon = 10^{-3}$ (крива 2).

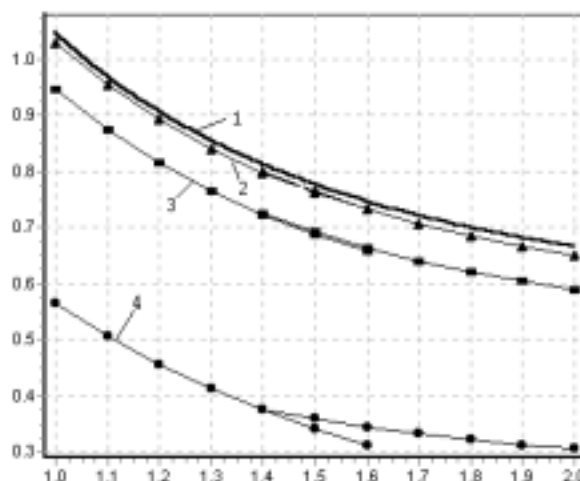


Рис. 3

Таблиця 2.

r	u_r	Аналітичний розв'язок	Відносна похибка, %
1.0	1.030	1.048	1.6
1.1	0.954	0.971	1.7
1.2	0.892	0.908	1.8
1.3	0.841	0.856	1.8
1.4	0.798	0.814	1.9
	0.799	0.814	1.8
1.5	0.763	0.778	1.9
	0.764	0.778	1.8
1.6	0.733	0.748	2.0
	0.733	0.748	2.0
1.7	0.707	0.722	2.1
1.8	0.685	0.701	2.2
1.9	0.666	0.682	2.3
2.0	0.651	0.667	2.3

Значення переміщень u_r/a при $z=0$ для $\varepsilon=10^{-3}$ та відносна похибка для різних значень координати r наведені в табл.2. Для значень $r=1.4$, $r=1.5$ та $r=1.6$ є два числа: верхнє – значення отримане МСЕ, нижнє – значення отримане НМГЕ.

У табл. 3 наведено значення отриманих напружень σ_{rr}/p при $z=0$ для $\varepsilon=10^{-3}$ залежно від координати r , на рис. 4 – їхні графіки (крива 1 – аналітичний розв'язок, крива 2 – значення отримані МСЕ, крива 3 – значення отримані НМГЕ). Відхилення значень напружень отриманих МСЕ при $r=1.0$ і $r=1.6$ пояснюється низькою якістю справджування природної граничної умови в разі використання невеликої кількості скінченних елементів з білінійною апроксимацією переміщень.

Таблиця 3.

r	σ_{rr}	Аналітичний розв'язок
1.0	-0.787	-1.000
1.1	-0.784	-0.769
1.2	-0.606	-0.593
1.3	-0.469	-0.456
1.4	-0.359	-0.347
1.5	-0.272	-0.259
	-0.270	-0.259
1.6	-0.254	-0.187
	-0.206	-0.187
1.7	-0.147	-0.128
1.8	-0.097	-0.078
1.9	-0.049	-0.036

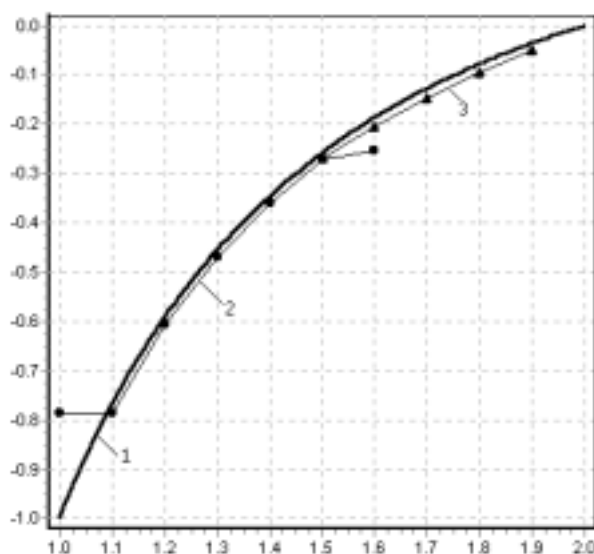


Рис 4.

У випадку використання коефіцієнта ω , обчисленого за формулою (14), простежується значне прискорення процесу збіжності. У табл. 4 наведено кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності за формулою (11) без використання коефіцієнта релаксації та з використанням обчисленого значення коефіцієнта згідно з формулою (14).

Таблиця 4.

Значення ϵ	$\omega = 1$		ω за формулою (14)	
	Кількість ітерацій	Час, хв.	Кількість ітерацій	Час, хв.
10^{-1}	8	1	3	0.5
10^{-2}	29	4	4	0.75
10^{-3}	57	8	4	0.75

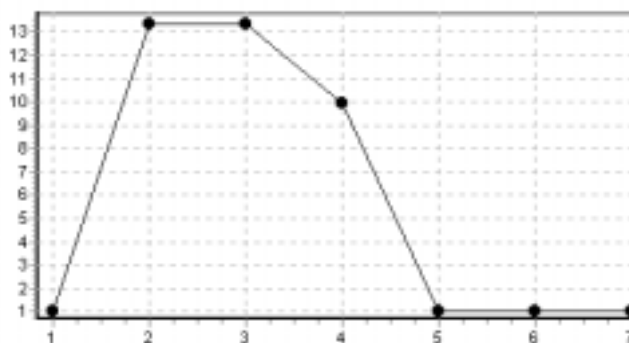


Рис. 5

Із використанням коефіцієнта релаксації ω за формулою (14) при $\varepsilon = 10^{-10}$ у формулі (11) достатньо сім ітерацій. На рис. 5 показано графік зміни значення коефіцієнта ω з ітераціями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бенерджи П., Баттерфілд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Головач Н.П., Дияк І.І. Метод декомпозиції області та комбінований скінченно-гранично-елементний аналіз пружності// Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2000, №1, С.115-117
3. Григоренко А. Я., Дияк І.І., Макара В.М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров//Прикл. механика, 2001, т.37(47), №5. С.74-84.
4. Дияк І., Тучапський Р. Чисельне дослідження задачі осесиметричної теорії пружності адаптивним непрямим методом граничних елементів // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика, 2001. Вип. 2. С. 110-115.
5. Савула Я.Г., Кривс В.В. Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1996. Вип.44. С. 3-10.
6. Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости // Докл. АН СССР,-1936,- т.4/13. Вып.6. С.235-238.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.,Наука,1975.- 576 с.
8. Lin C.-C., Lawton E.C., Caliendo J.C., Anderson L.R. An iterative finite element-boundary element algorithm// Comput. Struct. 1996. Vol. 59, №5, PP.899-909.
9. Smith B.F., Bjorstad P.E., Gropp W.D. Domain Decomposition. – Cambridge Univ. Press,1996. – 224p.
10. Hsiao G.C., E. Schnack, Wedland W. L. Hybrid coupled finite element methods for elliptic systems of second order // Comp. Methods appl. Meth. Engrg. 2000.Vol.190. PP. 431 – 485.

HYBRID COUPLED FINITE-BOUNDARY ELEMENT SCHEME FOR ELASTICITY PROBLEM ON THE BASE OF DOMAIN DECOMPOSITION

I. Dyyak, T. Berezyuk

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: dyyak@franko.lviv.ua

The heterogeneous numerical scheme for the solution of axisymmetric problem of elasticity with use of a finite element method and indirect boundary element method on the base of alternating Schwarz method is proposed. The choice of a parameter of relaxation for acceleration of iterative process is offered. The results of numerical experiments for the model problem are presented.

Key words: domain decomposition method, Schwarz method, finite element method, indirect boundary element method

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2001
Прийнята до друку 11.06.2002