ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2002. Вип. 4. С. 120-125 *2002. No 4. P. 120-125*

УДК 512.933

МАТРИЦЯ, ОБЕРНЕНА ДО ЕРМІТОВОЇ НАД ТІЛОМ

І. Кирчей

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім.Я.С.Підстригача НАН України

Запроваджено поняття рядкових та стовпцевих визначників для квадратних матриць над тілом, розглянуто їхні властивості для ермітової матриці та показано, що ці визначники є узагальненням визначника Мура. Побудовано матрицю, обернену до ермітової.

Ключові слова: ермітова матриця, рядковий визначник, стовпцевий визначник

1. ОЗНАЧЕННЯ ОСНОВНОГО ТІЛА

Нехай тіло S – композиційна асоціативна алгебра над своїм центром – полем F характеристики, що не дорівнює 2, тоді S – ізоморфна одній з таких алгебр:

1) F – полю характеристики, що не дорівнює 2;

2) $\mathrm{C}(\alpha)=(\mathrm{F},\alpha)$, $\alpha\neq 0$, – алгебрі, яку одержують з алгебри F за допомогою процесу Келі–Діксона. Якщо многочлен $x^2+\alpha$ незвідний над F, то $\mathrm{C}(\alpha)$ є полем, у протилежному випадку $\mathrm{C}(\alpha)\simeq\mathrm{F}\times\mathrm{F}$;

3) $\mathrm{H}(\alpha,\beta)=(\mathrm{C}(\alpha),\beta)$, $\beta\neq 0$, – алгебрі узагальнених кватерніонів. Ця алгебра асоціативна, але некомутативна.

2. ОЗНАЧЕННЯ РЯДКОВИХ ТА СТОВПЦЕВИХ ВИЗНАЧНИКІВ

Нехай задано множину індексів $I=\{1,...,n\}$, $i_k\in I$, $(k=\overline{1,n})$.

Означення 1. Підстановки n-го степеня будемо називати *впорядкованими зліва*, якщо кожна з них розкладається зліва направо на r, $\left(\forall r=\overline{1,n}\right)$, незалежних циклів, у цьому разі індекс, що розпочинає кожен, починаючи з другого, незалежний цикл, є найменшим з множини тих, які залишилися:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s & i_k & \dots \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & i_{k+1} & \dots \end{pmatrix},$$

де $i_k=\min\{i_{s+1},\dots,i_n\}$

Означення 2. Підстановки n-ої степені будемо називати *впорядкованими справа*, якщо кожна з них розкладається справа наліво на r, $\left(r=\overline{1,n}\right)$, незалежних циклів, при цьому індекс, що розпочинає кожен, починаючи з другого, незалежний цикл є найменшим з множини тих, які залишилися:

$$\begin{pmatrix} \dots & i_k & i_s & \dots & i_2 & i_1 \\ \dots & i_{k+1} & i_1 & \dots & i_3 & i_2 \end{pmatrix}$$

де $i_k=\min\{i_{s+1},\dots,i_n\}$.

Нехай I, J – упорядковані множини індексів з n елементів. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – квадратна матриця n-го порядку з елементами тіла S: $a_{ij} \in \mathrm{S}$, $(\forall i \in I, \forall j \in J)$. Складемо добуток із n елементів матриці A, розміщених по одному в кожному рядку та стовпцю :

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-1} i_n} \cdot a_{i_n i_k} \qquad (1)$$

Означення 3. Будемо говорити, що добуток (1) *задовольняє умову впорядкованості зліва (справа)*, якщо його індекси становлять підстановку, впорядковану зліва (справа).

Означення 4. *Рядковим визначником за i-м рядком* квадратної матриці A n-го порядку $\mathrm{rdet}_i A$, $(\forall i = \overline{1,n})$, називають алгебраїчну суму $n!$ мономів – усіх можливих добутків елементів матриці A, узятих по одному з кожного рядка та стовпця, у цьому разі першим ліворуч у кожному з них є елемент i-го рядка, а всі наступні множники йдуть у такому порядку, щоб добутки задовольняли умову впорядкованості зліва, і якщо індекси елементів монома удобутку становлять парну підстановку, то його беруть з додатним знаком, якщо непарну, – то з від'ємним.

Нехай R_{ij} - сума, яку одержимо, винісши з $(n-1)!$ відповідних мономів визначника $\mathrm{rdet}_i A$ спільний множник a_{ij}, розміщений у кожному з них першим ліворуч, і будемо називати її *правим алгебричним доповненням елемента* a_{ij}.

Нехай A^{ij} – підматриця матриці A, яку одержимо, викресливши i-й рядок та j-й стовпець. Позначимо через $a_{.j}$ j-й стовпець, а через $a_{i.}$ i-й рядок матриці A. І нехай $A_{.j}(b)$ – матриця, яку одержимо з матриці A заміною її j-го стовпця стовпцем b, а $A_{i.}(b)$ – матриця, яку одержимо з матриці A, замінивши її i-й рядок рядком b. Така лема дає змогу обчислювати рядкові визначники квадратних матриць n-го порядку через рядкові визначники квадратних матриць нижчих порядків.

Лема 1. Нехай R_{ij} – праве алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці A над тілом S, тоді:

$$R_{ij} = \begin{cases} -\mathrm{rdet}_j A^{ii}_{.j}(a_{.i}), & \textit{якщо } i \neq j, \\ \mathrm{rdet}_k A^{ii}, & \textit{якщо } i = j, \end{cases}$$

де $A^{ii}_{.j}(a_{.i})$ – матриця, яку одержимо з матриці A, спочатку замінивши елементи її j-го стовпця відповідними елементами i-го стовпця, а потім викресливши i-й рядок та i-й стовпець, і $k = \min\{I \setminus \{i\}\}$.

Отже, для рядкового визначника матриці A за будь-яким її рядком одержимо:

$$\mathrm{rdet}_i A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij} = -\sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot \mathrm{rdet}_j A^{ii}_{.j}(a_{.i}) + a_{ii} \cdot \mathrm{rdet}_k A^{ii}, \ \left(\forall i = \overline{1,n}\right) \qquad (2)$$

Означення 5. *Стовпцевим визначником за j-м стовпцем* квадратної матриці A n-го порядку $\mathrm{cdet}_j A$, $(\forall j = \overline{1,n})$ називають алгебраїчну суму $n!$ мономів – усіх можливих добутків елементів матриці A, взятих по одному з кожного рядка та стовпця і таких, що першим множником праворуч у кожному з них є елемент j-го стовпця, а всі наступні множники йдуть у такому порядку, щоб добутки задовольняли умову впорядкованості справа, у цьому разі якщо індекси становлять парну підстановку, то моном беруть з додатним знаком, якщо непарну, – то з від'ємним.

Нехай $L_{i\,j}$ – сума, яку одержимо, винісши з $(n-1)!$ відповідних доданків стовпцевого визначника $\operatorname{cdet}_j A$ спільний множник $a_{i\,j}$, розміщений в кожному з них першим праворуч, і будемо називати її *лівим алгебричним доповненням елемента* $a_{i\,j}$.

Справджується така лема:

Лема 2. Нехай $L_{i\,j}$ – ліве алгебргичне доповнення елемента $a_{i\,j}$ матриці A над тілом S, тоді:

$$L_{i\,j} = \begin{cases} \operatorname{cdet}_i A^{jj}_{i.}\left(a_{j.}\right), \text{ якщо } i \neq j, \\ \operatorname{cdet}_k A^{ii}, \text{ якщо } i = j, \end{cases}$$

де $A^{jj}_{i.}\left(a_{j.}\right)$ – матриця, яку одержимо з матриці A, спочатку замінивши елементи її i-го рядка відповідними елементами j-го рядка, а потім викресливши j-й рядок та j-й стовпець, і $k = \min\{J \setminus \{j\}\}$.

Тоді для стовпцевого визначника матриці A за будь-яким її стовпцем одержимо:

$$\operatorname{cdet}_j A = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij} = -\sum_{j \neq i} \operatorname{cdet}_i A^{jj}_{i.}\left(a_{j.}\right) \cdot a_{ij} + \operatorname{cdet}_k A^{ii} \cdot a_{ii}, \quad \left(\forall i = \overline{1,n}\right),$$

де $k = \min\{J \setminus \{j\}\}$.

Очевидно, що кожному моному будь-якого означеного вище визначника квадратної матриці відповідає моном будь-якого іншого визначника, рядкового чи стовпцевого, такий, що обидва вони мають однаковий знак та складаються з тих же множників, – елементів матриці, і відрізняються тільки порядком їхнього розміщення. І, якщо елементи матриці комутують, то

$$\operatorname{rdet}_1 A = \ldots = \operatorname{rdet}_n A = \operatorname{cdet}_1 A = \ldots = \operatorname{cdet}_n A.$$

3. ВЛАСТИВОСТІ СТОВПЦЕВИХ ТА РЯДКОВИХ ВИЗНАЧНИКІВ

Розглянемо головні властивості стовпцевих та рядкових визначників довільної квадратної матриці над тілом S, доведення яких безпосередньо випливає з означень.

1. Якщо один із рядків (стовпців) матриці A над тілом S складається з нулів, то будь-який рядковий визначник та будь-який стовпцевий визначник такої матриці дорівнює нулю.

2. Якщо всі елементи i-го рядка квадратної матриці A над тілом S домножити зліва на довільний елемент b тіла S, то рядковий визначник за i-м рядком матриці A домножиться зліва на b.

3. Якщо всі елементи j-го стовпця квадратної матриці A над тілом S домножити справа на довільний елемент b тіла, то стовпцевий визначник за j-м стовпцем матриці A домножується справа на b.

4. Якщо всі елементи i-го рядка квадратної матриці A над тілом S можна записати у вигляді суми двох доданків $a_{ij} = b_j + c_j$, $(\forall j = \overline{1,n})$, то рядковий визначник за будь-яким рядком (стовпцевий визначник за будь-яким стовпцем) матриці A

дорівнює сумі двох рядкових визначників за цим же рядком (стовпцевих визначників за цим же стовпцем) матриць, у яких всі рядки, крім i -го, такі ж, як і в матриці A, а i -й рядок в одній матриці складається з елементів b_j, а в іншій – з елементів c_j, $(\forall j = \overline{1,n})$.

5. Якщо всі елементи j -го стовпця матриці A можна записати у вигляді суми двох доданків: $a_{ij} = b_i + c_i$, $(\forall i = \overline{1,n})$, то рядковий визначник за будь-яким рядком (стовпцевий визначник за будь-яким стовпцем) матриці A дорівнює сумі двох рядкових визначників за тим же рядком (стовпцевих визначників за тим же стовпцем) матриць, у яких усі стовпці, крім j -го, такі ж, як і в матриці A, а j -й стовпець в одній матриці складається з елементів b_i, а в іншій – з елементів c_i, $(\forall i = \overline{1,n})$.

4. ВИЗНАЧНИК ЕРМІТОВОЇ МАТРИЦІ

Означення 6. Квадратну матрицю $A = \left\| a_{ij} \right\|_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, де $a_{ij} \in \mathrm{S}$, $(\forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n})$ назвемо *ермітовою*, якщо вона збігається зі своєю спряженою.

Теорема 1 [5]. Нехай A – ермітова матриця n -го порядку з елементами тіла S, тоді: $\mathrm{rdet}_1 A = \ldots = \mathrm{rdet}_n A = \mathrm{cdet}_1 A = \ldots = \mathrm{cdet}_n A = \gamma \in \mathrm{F}$

Оскільки всі стовпцеві та рядкові визначники ермітової матриці рівні між собою, то для неї введемо поняття визначника матриці: $\det A = \gamma$, який будемо розкривати як рядковий за будь-яким рядком, або як стовпцевий за будь-яким стовпцем матриці.

Отже, якщо A – ермітова матриця n -го порядку над тілом S, то

$$\det A = \mathrm{rdet}_i A = \mathrm{cdet}_j A, \ \left(\forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}\right).$$

5. ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ РЯДКОВОГО ВИЗНАЧНИКА ТА ВИЗНАЧНИКА МУРА ДЛЯ ЕРМІТОВОЇ МАТРИЦІ

Вперше визначник для ермітової матриці з некомутуючими елементами розглядав Е.Мур [6]. Він визначав його індукцією за n для майже самоспряженої матриці n -го порядку над тілом кватерніонів H, тобто самоспряженої (ермітової) матриці за винятком одного фіксованого i -го рядка чи i -го стовпця:

$$a_{kl} = \overline{a_{kl}}, \text{ коли } k \neq i, l \neq i. \tag{3}$$

А саме: для $n = 1$ $\mathrm{Qdet}\, A = a_{11}$, а для $n > 1$

$$\mathrm{Qdet}\, A = -\sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot \mathrm{Qdet}\, A_j^{ii}\left(a_{.i}\right) + a_{ii} \cdot \mathrm{Qdet}\, A^{ii}, \tag{4}$$

де індекс i вибирають той же, що і в рівності (3).

Доведена теорема [7, стор. 294] про те, що для самоспряженої матриці значення $\mathrm{Qdet}\, A$ не залежить від індексу i і є скаляром. Порівнюючи вираз (2) з виразом (4) для самоспряженої (ермітової) матриці A і враховуючи, що обидва вони не залежать від індексу i, а також і k (оскільки A^{ii} – ермітова), очевидним є висновок, що введений рядковий визначник для ермітової матриці при $\mathrm{S} \equiv \mathrm{H}$ тотожний визначникові Мура, а стовпцеві та рядкові визначники для довільних матриць є його узагальненням. Доцільність їх уведення виявляється вже в разі розгляду їхніх властивостей, які є близькими до властивостей визначників матриць над полем дійсних чисел.

6. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКА ЕРМІТОВОЇ МАТРИЦІ

Наведемо без доведення властивості визначника ермітової матриці:

1) якщо матрицю B одержують з ермітової матриці A перестановкою її довільного i-го рядка з її першим рядком, то $\mathrm{rdet}_i\, B = -\det A$;

2) якщо матрицю B одержують з ермітової матриці A перестановкою її довільного j-го стовпця з її першим стовпцем, то $\mathrm{cdet}_j\, B = -\det A$;

3) якщо всі елементи j-го рядка ермітової матриці замінити відповідними елементами i-го рядка, залишивши i-й рядок без змін, то рядковий визначник за j-м рядком такої матриці дорівнює нулю;

4) якщо всі елементи j-го стовпця ермітової матриці замінити відповідними елементами i-го стовпця, залишивши i-й стовпець без змін, то стовпцевий визначник за j-м стовпцем такої матриці дорівнює нулю;

5) якщо всі елементи i-го рядка ермітової матриці замінити лівою лінійною комбінацією її інших рядків, тобто $a_{i\cdot} = c_1 \cdot a_{i_1\cdot} + \ldots + c_k \cdot a_{i_k\cdot}$, де $c_l \in \mathrm{S}, (\forall l = \overline{1,k})$, і $i_k \in I$, $(\forall k \le n-1)$, то рядковий визначник за i-м рядком такої матриці дорівнює нулю;

6) якщо всі елементи j -го стовпця ермітової матриці замінити правою лінійною комбінацією її інших стовпців, тобто $a_{\cdot j} = a_{\cdot j_1} \cdot c_1 + \ldots + a_{\cdot j_k} \cdot c_k$, де $c_l \in \mathrm{S}\, (\forall l = \overline{1,k})$ і $j_k \in J$, $(\forall k \le n-1)$, то стовпцевий визначник за j-м стовпцем такої матриці дорівнює нулю;

7) якщо до всіх елементів i-го рядка ермітової матриці A додати довільну ліву лінійну комбінацію її інших рядків, то рядковий визначник за i-м рядком такої матриці дорівнює визначнику ермітової матриці A;

8) якщо до всіх елементів j-го стовпця ермітової матриці A додати довільну праву лінійну комбінацію її інших стовпців, то стовпцевий визначник за j-м стовпцем такої матриці дорівнює визначнику ермітової матриці A.

7. МАТРИЦЯ, ОБЕРНЕНА ДО ЕРМІТОВОЇ

Означення 7. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку над тілом S. Матрицю $(LA)^{-1}$ називають *лівою оберненою* до матриці A, якщо

$$(LA)^{-1} \cdot A = E.$$

Означення 8. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку над тілом S. Матрицю $(RA)^{-1}$ називають *правою оберненою* до A, якщо

$$A \cdot (RA)^{-1} = E.$$

Теорема 2. Для ермітової невиродженої матриці A існує єдина права обернена матриця $(RA)^{-1}$:

$$(RA)^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1n} & R_{2n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix},$$

де $R_{ij}, \left(\forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}\right)$ – праве алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці A, і єдина ліва обернена матриця $(LA)^{-1}$:

$$(LA)^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix},$$

де $L_{ij}, \left(\forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}\right)$ – ліве алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці A, і вони дорівнюють одна одній: $(RA)^{-1} = (LA)^{-1} =: A^{-1}$.

Теорему доводимо, безпосередньо перемноживши матрицю A на матрицю $(LA)^{-1}$ справа і на матрицю $(RA)^{-1}$ зліва, та застосувавши властивості визначника ермітової матриці.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Артин Э*. Геометрическая алгебра. М., 1969.
2. *Гельфанд И. М., Ретах В. С.* Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов // Функциональный анализ и его приложения. 1992. Т. 26, Вып.4. С. 33-45
3. *Жевлаков К.А. и др*. Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.
4. *Кирчей І.І.* Дробово-раціональна регуляризація системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів // Мат. методи та фізико-механічні поля. 1996. Т. 39. № 2. С. 89-95.
5. *Сявавко М.С. J* - дробова регуляризація лінійних некоректних рівнянь // Укр. Мат. журнал. 1996. № 48, 8. С. 1130-1143.
6. *E.H.Moore,* Bull. Am. Math. Soc. 28, 161 (1922)
7. *J.Dyson*. Quaternion Determinants // Helvetica Acta, 45: 289-302, 1972

THE INVERSE MATRIX FOR HERMITIAN OVER A QUASI-FIELD

I. Kyrchey

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine, Naukova str., 3 b, 79601, Lviv, Ukraine,

The row and column determinants for square matrices over a quasi-field are introduced. Their conditions for Hermitian matrix are concidered and we prove that these determinants are generalizing Moore's determinant. The inverse matrix for Hermitian is constructed.

Ключові слова: Hermitian matrix, row determinant, column determinant

Стаття надійшла до редколегії 15.11.2001
Прийнята до друку 19.03.2002