ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2002. Вип. 4. С. 110-113 *2002. No 4. P. 110-113*

УДК 519.21:519.61

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ ГАУССА-НЬЮТОНА ДО ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

О. Гнатишин, С. Шахно

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: ktop@ franko.lviv.ua

Світлій пам'яті
Івана Дмитровича Квіта
присвячується

Для оцінки невідомих параметрів теоретичних законів розподілу напрацювань до відмови технічних систем для випадку повних та довільно зрізаних вибірок спостережень застосовано методи найменших квадратів та мінімуму χ^2. Отримані нелінійні задачі найменших квадратів розв'язані різницевими модифікаціями методів Гаусса-Ньютона, які не потребують обчислення похідних.

Ключові слова: закон розподілу; напрацювання на відмову; зрізана вибірка; оцінка параметрів; задача найменших квадратів; методи типу Гаусса-Ньютона.

Математичне моделювання процесів руйнування матеріалів чи безвідмовної роботи технічних систем потребує визначення невідомих параметрів теоретичних законів розподілу ймовірностей на підставі емпіричних даних. Інформацію про ці розподіли отримують у разі оцінювання результатів вимірювань чи спостережень за допомогою відповідних статистичних методів.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай напрацювання технічної системи до відмови описує абсолютно неперервна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей, залежною від s невідомих параметрів

$$F(t;\theta), \quad \theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_s),\ s=1,2,... \tag{1}$$

Необхідно на підставі емпіричних даних про напрацювання до відмов та зупинок оцінити невідомі параметри теоретичного закону розподілу ймовірностей (1).

На жаль, нема єдиної, найліпшої процедури оцінки невідомих параметрів. Найстарішим із сучасних методів отримання точкових оцінок є метод моментів. Він полягає в прирівнюванні s перших моментів генеральної сукупності до перших s вибіркових моментів. Розв'язок s рівнянь дає оцінки параметрів. Однак на практиці цей метод зрідка застосовують, якщо кількість невідомих параметрів більша чотирьох. Метод максимуму правдоподібності в умовах сформульованої задачі досліджено в [1]. Якщо нев'язки між емпіричною і теоретичною функцією розподілу - незалежні випадкові величини з розподілом $N(0,\sigma^2)$, то оцінки максимуму правдоподібності збігаються з оцінками найменших квадратів. Дослідимо застосування методу найменших квадратів та методу мінімуму χ^2 для оцінки невідомих параметрів на підставі зрізаних вибірок спостережень.

2. ОБГРУНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай

$$t_1, t_2, ..., t_n,\ n = 1,2,... \tag{2}$$

вибірка незалежних спостережень над популяцією, що керована функцією розподілу (1).

У праці [2] з'ясовано, що емпірична функція розподілу ймовірностей $F_n(t)$, побудована на підставі вибірки (1), є незміщеною і консистентною оцінкою закону розподілу генеральної сукупності, з якої взято вибірку , тобто

$$\begin{cases} E(F_n(t)) = F(t;\theta); \\ P\left\{\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t;\theta)\right\} = 1. \end{cases}$$

Оцінки найменших квадратів – це ті значення θ, які мінімізують суму квадратів відхилень

$$\min_{\theta\in R^s} \sum_{j=1}^{n} \left(F_n(t_j) - F(t_j;\theta)\right)^2. \tag{3}$$

Розглянемо випадок, коли обсяг вибірки є число велике (n>50) і всі спостереження розбиті на k несумісних інтервалів, які в сукупності вичерпують весь простір спостережень. Нехай n_j - спостережена кількість елементів вибірки (2) в j-му інтервалі, $j = 1,2,...,$ $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$; $p_j(\theta)$ – теоретична ймовірність потрапляння в j-й інтервал, визначена через функцію розподілу (1). Тоді задача оцінки невідомих параметрів θ за методом мінімуму χ^2 полягає в розв'язуванні задачі мінімізації

$$\min_{\theta\in R^s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(n_j - np_j(\theta)\right)^2}{np_j(\theta)} \tag{4}$$

Оскільки $np_j(\theta) > 0$, то задачу (4) можемо записати як задачу найменших квадратів

$$\min_{\theta\in R^s} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\left(n_j - np_j(\theta)\right)}{\sqrt{np_j(\theta)}}\right)^2 \tag{5}$$

3. ЗРІЗАНІ ВИБІРКИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Нехай $t_1, t_2, ..., t_n,\ n = 1,2,...$ – напрацювання n однотипних технічних пристроїв. Деякі технічні пристрої працювали до відмови, інші були зупинені, хоч і могли ще працювати. Нехай k пристроїв з n працювали до відмови, а решта n-k були зупинені.

Позначимо через $\bar{j}$ сподіваний ранг фактичної j-ї відмови у спільному варіаційному ряді. Методика обчислення сподіваних рангів наведена, наприклад, у праці [2]. Зрізану медіанну емпіричну функцію розподілу напрацювань пристрою до моменту t обчислюють за формулою

$$F_n(t)=\frac{\bar{j}-0.3}{n+0.4}+\frac{1}{n+0.4}\cdot\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad t_j\le t\le t_{j+1}, \quad j=1,2,\ldots,k-1, \quad n=2,3,\ldots . \tag{6}$$

Тоді задача найменших квадратів (3) набуде вигляду

$$\min_{\theta\in R^s}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\bar{j}-0.3}{n+0.4}-F(t_j;\theta)\right)^2. \tag{7}$$

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Задачу оцінки невідомих параметрів теоретичних законів розподілу зведено до розв’язуваня задач найменших квадратів (3), (5), (7). Оскільки функція $F(t,\theta)$, як звичайно, нелінійна, то перед нами стоїть завдання розв’язати нелінійну задачу найменших квадратів.

Найпоширенішими й ефективними методами для розв’язування нелінійної задачі найменших квадратів

$$\min_{x\in R^n}\sum_{i=1}^{m}F_i(x)^2, \quad m\ge n, \tag{8}$$

де $F: R^n\to R^m$ - нелінійна за x функція, є метод Гаусса-Ньютона і його модифікації [4]. Однак усі ці методи потребують обчислення оператора $F'(x)$, що небажано. Ми пропонуємо для розв’язування задачі (8) застосувати ітераційно-різницеву модифікацію методу Гаусса-Ньютона, досліджену в [5]:

$$x_{n+1}=x_n-\left[F(u_n,v_n)^T F(u_n,v_n)\right]^{-1}F(u_n,v_n)^T F(x_n) \quad n=1,2,\ldots, \tag{9}$$

де $F(u,v)$ – перша поділена різниця для функції $F(x)$, а u_n, v_n вибираємо у вигляді $u_n=2x_n-x_{n-1}$, $v_n=x_{n-1}$ або $u_n=x_n$, $v_n=x_{n-1}$. Якщо $u_n=v_n=x_n$, то метод (9) збігається з методом Гаусса-Ньютона. Швидкість збіжності запропонованої модифікації (9) така сама, як і в методу Гаусса-Ньютона, тобто квадратична для випадку нульової нев’язки і лінійна для випадку малої нев’язки.

Приклад. Проведено спостереження за напрацюванням 22 баштових кранів. 9 кранів відмовили, пропрацювавши, відповідно, 20550, 22400, 23710, 27375, 31270, 37775, 38125, 43600 48455 год., решта 13 кранів на момент дослідження мали, відповідно, напрацювання 32000, 26825, 29000, 16500, 4200, 3400, 3800, 5500, 5325, 2750, 300, 3200, 3650 год.

На підставі цих експериментальних даних, апріорі припустивши, що генеральна сукупність керувана законом Гнеденка-Вейбулла, треба оцінити невідомі параметри закону розподілу напрацювань на відмову кранів цього типу.

Отриманий закон розподілу

$F(t;\theta_1,\theta_2)=1-\exp(-(t/38607.15)^{3.236389})$.

Початкові наближення для розв’язування задачі найменших квадратів $(30000;\ 2)$; $(30030;\ 2.01)$.

Кількість ітерацій – **6.**

Нев’язка **0.012911**.

Точність обчислень ***E-08.***

Отже, за допомогою методів найменших квадратів і мінімуму χ^2 з використанням різницевої модифікації методу Гаусса-Ньютона розв'язано задачу оцінки невідомих параметрів теоретичних законів розподілу в задачах теорії надійності для випадку повних та зрізаних вибірок напрацювань до відмови технічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гнатишин О.П., Москв'як Є.В.* Метод максимальної правдоподібності для зрізаної вибірки // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С. 37-41.
2. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М., 1988.
3. *Квіт І.Д., Гнатишин О.П.* Медіанна емпірична функція розподілу. Методичні вказівки для студентів факультету прикладної математики та механіко-математичного факультету. Львів, 1989.
4. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988.
5. *Shachno S.M., Gnatyshyn O.P.* On Some Iterative-Difference Methods for Solving Nonlinear Least-Squares Problem // 10th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry, June 22-27, 1998. Götheborg. Sweden. P. 223-225.

APPLICATION OF GAUSS-NEWTON LIKE METHODS TO ESTIMATION OF THE UNKNOWN PARAMETERS OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS IN RELIABILITY PROBLEMS

O. Gnatyshyn, S. Shakhno

Ivan Franko National University In Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: ktop@ franko.lviv.ua

The methods of the least squares and of the minimization of χ^2 were applied to solving the problem of estimation of the unknown parameters of distribution functions of time-to-failure in the case of the censored samples. The received nonlinear least-squares problems were solved by the difference modifications of the Gauss-Newton like methods, which don't demand the evaluation of derivatives. The numerical result of the reliability problem is presented.

Key words: distribution function; time-to-failure; censored sample; parameter estimation; nonlinear least squares problem, Gauss-Newton like method.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2001
Прийнята до друку 19.03.2002