ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2002. Вип. 4. С. 44-50 *2002. No 4. P. 44-50*

УДК 518.12

ПРО МЕТОД ПАРАМЕТРІВ ВИДІЛЕННЯ “МАКСИМАЛЬНИХ” ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ АЛГЕБРИЧНИХ БАГАТОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Г. Коваль, Г. Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@ franko.lviv.ua

Розглянуто використання методу параметрів для виділення “максимальних” областей, які не містять дійсних нулів алгебричних багаточленів від двох дійсних змінних.

Ключові слова: метод параметрів; локалізація нулів; алгебричні багаточлени від двох змінних.

1. ВСТУП

У праці [1] для локалізації за модулем нулів поліномів, степеневих рядів і рядів Лорана запропоновано метод параметрів. Цей метод виявився універсальним, оскільки його можна застосувати для локалізації нулів поліномів і рядів Діріхле, квазіполіномів, узагальнених степеневих рядів тощо. Вибираючи відповідно параметри, за допомогою цього методу можна одержати як частковий випадок багато відомих в літературі результатів, що стосуються локалізації нулів поліномів і рядів. Крім того, результати, що одержують за найкращого вибору параметрів у цьому методі, поліпшити вже не можна. У [2, 3] метод параметрів використаний для локалізації дійсних коренів алгебричних рівнянь, а також для розв’язування оберненої задачі до задачі локалізації за модулем нулів поліномів. У праці [4] за допомогою параметрів визначено достатні умови існування “максимальних” областей, у яких немає дійсних коренів алгебричних багаточленів від двох дійсних змінних. Виявляється, що для кожного такого багаточлена, який має додатні і від’ємні коефіцієнти, використовуючи метод параметрів, завжди можна виділити від двох до восьми “максимальних” областей, у яких немає коренів. Способи побудови таких областей ми і розглянемо.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо алгебричний багаточлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m}A_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu} \ . \tag{1}$$

Використовуючи метод параметрів, приведемо способи побудови “максимальних” областей, що відповідають відмінним від нуля коефіцієнтам $A_{00}, A_{n0}, A_{0m}, A_{nm}$, у яких багаточлен не набуває нульових значень.

3. СПОСОБИ ПОБУДОВИ “МАКСИМАЛЬНИХ” ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ БАГАТОЧЛЕНА

Нехай $A_{00} > 0$, $E_1 = \{(\mu,\nu) | A_{\mu\nu} > 0\}$, $E_2 = \{(\mu,\nu) | A_{\mu\nu} < 0\}$. Тоді, прирівнявши багаточлен $f(x,y)$ до нуля, одержимо

$$a_{00} + \sum_{\substack{(\mu,\nu)\in E_1 \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu ,$$

де $a_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}, (\mu,\nu)\in E_1,$ і $a_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}, (\mu,\nu)\in E_{2.}$

Якщо $x \ge 0, y \ge 0,$ то матимемо таку нерівність:

$$a_{00} \le \sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad . \tag{2}$$

Уведемо позначення:

$$M = \{(\mu,\nu)\in E_2 | \nu > 0\},\ N_1 = \{\mu > 0 | (\mu,0)\in E_2\};$$
$$N_2 = \{\mu > 0 | (\mu,\nu)\in M\},\ P = \{\nu > 0 | (0,\nu)\in E_2\};$$
$$N = N_1 \cup N_2,\ S = N_2 \setminus N_1,\ M_1 = \{(\mu,\nu)\in M | \mu > 0\}.$$

Нехай $\{\alpha_{\mu\nu}\}, (\mu,\nu)\in E_2$, і α_{00} – довільний набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{00}. \tag{3}$$

Якщо $S \neq \varnothing$ і $\mu \in S$, то парі індексів $(\mu,0)$ поставимо у відповідність довільні додатні числа $a_{\mu 0}$ і $\alpha_{\mu 0}$.

Приймемо

$$R_1(0,0) = \min_{\mu\in N} \left(\frac{a_{00}\alpha_{\mu 0}}{a_{\mu 0}\alpha_{00}} \right)^{\frac{1}{\mu}} , \tag{4}$$

$$R_2(0,0) = \min_{(\mu,\nu)\in M} \left(\frac{a_{\mu 0}\alpha_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}\alpha_{\mu 0}} \right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{5}$$

Теорема 1. Багаточлен (1) не має коренів в області

$$\{0 \le x < R_1(0,0), 0 \le y < R_2(0,0)\}. \tag{6}$$

Доведення. Приймемо $R_1(0,0) = R_1, R_2(0,0) = R_2$. Тоді із (4) і (5), відповідно, одержуємо

$$a_{\mu 0} R_1^\mu \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}} \alpha_{\mu 0}, \mu \in N ; \tag{7}$$

$$a_{\mu\nu} R_2^\mu \le \frac{a_{\mu 0}}{\alpha_{\mu 0}} \alpha_{\mu\nu}, (\mu,\nu)\in M. \tag{8}$$

Оскільки $N_1 \subset N$, то при $N_1 \neq \varnothing$ із (7) маємо

$$\sum_{\mu\in N_1} a_{\mu 0}R_1^{\mu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}} \sum_{\mu\in N_1}\alpha_{\mu 0}. \tag{9}$$

Якщо $P \ne \varnothing$, то для $\nu \in P$ із (8) випливає

$$a_{0\nu}R_2^{\nu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}}\alpha_{0\nu}.$$

Звідси

$$\sum_{\nu\in P} a_{0\nu}R_2^{\nu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}} \sum_{\nu\in P}\alpha_{0\nu}. \tag{10}$$

Оскільки $N_2 \in N$ то при $M_1 \ne \varnothing$ для кожної пари індексів $(\mu,\nu)\in M_1$ із (7) і (8) одержуємо нерівність

$$a_{\mu\nu}R_1^{\mu}R_2^{\nu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}}\alpha_{\mu\nu}.$$

Підсумуємо цю нерівність для всіх пар $(\mu,\nu)\in M_1$:

$$\sum_{(\mu,\nu)\in M_1} a_{\mu\nu}R_1^{\mu}R_2^{\nu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}} \sum_{(\mu,\nu)\in M_1}\alpha_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Якщо додамо нерівності (9) – (11), то матимемо

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu}R_1^{\mu}R_2^{\nu} \le \frac{a_{00}}{\alpha_{00}} \sum_{(\mu,\nu)\in E_2}\alpha_{\mu\nu}$$

або, враховуючи умову (3),

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu}R_1^{\mu}R_2^{\nu} \le a_{00}. \tag{12}$$

Доведемо, що багаточлен (1) не має коренів в області (6). Справді, припустимо від протилежного, що в області (6) існує точка $x = x_0, y = y_0$ така, що $f(x_0, y_0) = 0$. Тоді для цієї точки одержимо нерівність (2),тобто

$$a_{00} \le \sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu}x_0^{\mu}y_0^{\nu}.$$

Оскільки $x_0 < R_1$, $y_0 < R_2$, то з останньої нерівності випливає, що

$$a_{00} < \sum_{(\mu,\nu)\in E_2} a_{\mu\nu}R_1^{\mu}R_2^{\nu}.$$

Одержана нерівність суперечить нерівності (12). Отже, зроблене припущення неправильне, багаточлен (1) не має коренів в області (6).

Нехай $\overline{M} = \{(\mu,\nu)\in E_2 \,|\, \mu > 0\}$, $P_1 = \{\nu > 0 \,|\, (\mu,\nu)\in \overline{M}\}$, $K = P_1 \cup P$, $L = P_1 \setminus P$. Якщо $L \ne \varnothing$ і $\nu \in L$, то парі індексів $(0,\nu)$ поставимо у відповідність додатні числа $a_{0\nu}$ і $\alpha_{0\nu}$. Приймемо

$$R_1^*(0,0) = \min_{\nu\in K}\left(\frac{a_{00}\alpha_{0\nu}}{a_{0\nu}\alpha_{00}}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

$$R_2^*(0,0)=\min_{(\mu,\nu)\in\overline{M}}\left(\frac{a_{0\nu}\alpha_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}\alpha_{0\nu}}\right)^{\frac{1}{\mu}},$$

де параметри $\{\alpha_{\mu\nu}\}$, $(\mu,\nu)\in E_2$ і α_{00} задовольняють умову (3). Тоді справджується така теорема.

Теорема 2. Многочлен (1) не має коренів в області

$$\{0\le y<R_1^*(0,0), 0\le x<R_2^*(0,0)\}.$$

Доведення аналогічне до доведення теореми 1.

Припустимо тепер, що коефіцієнт $A_{n0}>0$. Позначимо

$$E_2=\{(\mu,\nu)|A_{\mu\nu}<0\},\ \ M=\{(\mu,\nu)\in E_2|\nu>0\};$$
$$N_1=\{\mu<n|(\mu,0)\in E_2\},\ \ N_2=\{\mu<n|(\mu,\nu)\in M\};$$
$$N=N_1\bigcup N_2,\ \ S=N_2\setminus N_1.$$

Якщо $S=\varnothing$ і $\mu\in S$, то парі індексів $(\mu,0)$ поставимо у відповідність довільні додатні числа $a_{\mu0}$ і $\alpha_{\mu0}$. Приймемо

$$R_1(n,0)=\max_{\mu\in N}\left(\frac{a_{\mu0}\alpha_{no}}{a_{n0}\alpha_{\mu0}}\right)^{\frac{1}{n-\mu}},$$

$$R_2(n,0)=\min_{(\mu,\nu)\in M}\left(\frac{a_{\mu0}\alpha_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}\alpha_{\mu0}}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

де $a_{\mu\nu}=-A_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E_2$,

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2}\alpha_{\mu\nu}=\alpha_{n0}.$$

Тоді, застосовуючи теорему 1 до багаточлена $x^n f\left(\frac{1}{x},y\right)$, одержуємо таку теорему.

Теорема 3. Багаточлен (1) не має коренів в області

$$\{R_1(n,0)<x<\infty, 0\le y\le R_2(n,0)\}.$$

Нехай $A_{0m}>0$. Позначимо

$$E_2=\{(\mu,\nu)|A_{\mu\nu}<0\},\ \ \overline{M}=\{(\mu,\nu)\in E_2|\mu>0\};$$
$$P=\{\nu<m|(0,\nu)\in E_2\},\ \ P_1=\{\nu<m|(\mu,\nu)\in\overline{M}\};$$
$$K=P_1\bigcup P,\ \ L=P_1\setminus P.$$

Якщо $L\ne\varnothing$ і $\nu\in L$, то парі індексів $(0,\nu)$ поставимо у відповідність довільні додатні числа $a_{0\nu}$ і $\alpha_{0\nu}$. Приймемо

$$R_1^*(0,m) = \max_{\nu \in K} \left(\frac{a_{0\nu}\alpha_{0m}}{a_{0m}\alpha_{0\nu}} \right)^{\frac{1}{m-\nu}},$$

$$R_2^*(0,m) = \min_{(\mu,\nu)\in \overline{M}} \left(\frac{a_{0\nu}\alpha_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}\alpha_{0\nu}} \right)^{\frac{1}{\mu}},$$

де $a_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E_2$,

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{0m}.$$

Тоді, застосовуючи теорему 2 до багаточлена $y^m f\left(x, \frac{1}{y}\right)$, одержуємо таку теорему.

Теорема 4. Багаточлен (1) не має коренів в області

$$\left\{ R_1^*(0,m) < y < \infty, 0 \le x < R_2^*(0,m) \right\}.$$

Нехай $A_{nm} > 0$. Позначимо

$$E_2 = \left\{ (\mu,\nu) \middle| A_{\mu\nu} < 0 \right\},\ M = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \middle| \nu < m \right\},$$

$$N_1 = \left\{ \mu < n \middle| (\mu,\nu)\in E_2 \right\},\ N_2 = \left\{ \mu < n \middle| (\mu,\nu)\in M \right\},$$

$$N = N_1 \bigcup N_2.\ S = N_2 \setminus N_1.$$

Якщо $S \ne \varnothing$ і $\mu \in S$, то парі індексів (μ,m) поставимо у відповідність довільні додатні числа $a_{\mu\nu}$ і $\alpha_{\mu\nu}$. Приймемо

$$R_1(n,m) = \max_{\mu \in N} \left(\frac{a_{\mu m}\alpha_{nm}}{a_{nm}\alpha_{\mu m}} \right)^{\frac{1}{n-\mu}};$$

$$R_2(n,m) = \max_{(\mu,\nu)\in M} \left(\frac{a_{\mu\nu}\alpha_{\mu m}}{a_{\mu m}\alpha_{\mu\nu}} \right)^{\frac{1}{n-\nu}},$$

де $a_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E_2$,

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{nm}.$$

Тоді, застосовуючи теорему 1 до багаточлена $x^n y^m f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, одержуємо таку теорему.

Теорема 5. Багаточлен (1) не має коренів в області

$$\left\{ R_1(n,m) < x < \infty, R_2(n,m) < y < \infty \right\}.$$

До багаточлена $x^n y^m f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ можна застосувати теорему 2. Справді, позначимо

$$\overline{M} = \{(\mu,\nu) \in E_2 \big| \mu < n\},\ P = \{\nu < m \big| (n,\nu) \in E_2\};$$

$$P_1 = \{\nu < m \big| (\mu,\nu) \in \overline{M}\},\ K = P_1 \cup P,\ L = P_1 \setminus P.$$

Якщо $L \neq \varnothing$ і $\nu \in L$, то парі індексів (n,ν) поставимо у відповідність довільні додатні числа $a_{n\nu}$ і $\alpha_{n\nu}$. Приймемо

$$R_1^*(n,m) = \max_{\nu \in K} \left(\frac{a_{n\nu}\alpha_{nm}}{a_{nm}\alpha_{n\nu}} \right)^{\frac{1}{m-\nu}};$$

$$R_2^*(n,m) = \max_{(\mu,\nu) \in \overline{M}} \left(\frac{a_{\mu\nu}\alpha_{n\nu}}{a_{n\nu}\alpha_{\mu\nu}} \right)^{\frac{1}{n-\mu}}.$$

Теорема 6. Багаточлен (1) не має коренів в області

$$\{R_1^*(n,m) < y < \infty, R_2^*(n,m) < x < \infty\}.$$

Аналогічно теорему 2 можна застосувати до багаточлена $x^n f\left(\frac{1}{x}, y\right)$, а теорему 1 – до багаточлена $y^m f\left(x, \frac{1}{y}\right)$.

Зауваження. Ми розглянули побудову “максимальних” областей у першій чверті площини xy. Використовуючи заміну x на $-x$ і y на $-y$, такі області можна будувати і в інших чвертях площини xy.

Нехай $E = \{(\mu,\nu) \big| A_{\mu\nu} \neq 0\}$. У площині $\mu o \nu$ відкладемо всі точки E. Побудуємо найменший прямокутник зі сторонами, що паралельні до осей координат, який містить точки множини E. Кількість крайніх точок h опуклої оболонки множини E, які лежать на сторонах прямокутника, буде в межах $2 \leq h \leq 8$. Якщо багаточлен $f(x,y)$ має від’ємні і додатні коефіцієнти, то для кожної з цих крайніх точок завжди можна визначити “максимальну” область, у якій немає коренів багаточлена.

Отже, за допомогою методу параметрів доведено теореми, які дають змогу будувати “максимальні” області, де багаточлени від двох дійсних змінних не містять нулів. На підставі цих теорем для кожного багаточлена, який має додатні і від’ємні коефіцієнти, завжди можна виділити від двох до восьми “максимальних” областей, у яких немає нулів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Цегелик Г. Г.* Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана // Изв. вузов. Математика. 1967. №2. С. 90-96.
2. *Цегелик Г. Г., Коваль Г. М.* Метод параметрів розв’язання прямої та оберненої задач локалізації коренів алгебраїчних многочленів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер.прикл. матем. та інформатика. 1999. Вип. 1. С. 243-249.

3. *Коваль Г. М., Цегелик Г. Г.* Метод параметрів локалізації дійсних коренів алгебраїчних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер.прикл. матем. та інформатика. 2000. Вип. 2. С. 37 – 42.
4. *Коваль Г. М., Цегелик Г. Г.* Метод параметрів виділення “максимальних” областей, які не містять нулів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. Прикладна математика. 2000. №411. С. 166-169.

A METHOD OF PARAMETERS FOR DEFINITION OF THE “MAXIMUM” DOMAINS WHICH ARE FREE OF ZEROS OF ALGEBRAIC POLINOMIALS OF TWO REAL VARIABLES

G. Koval, H. Tsehelyk

Ivan Franko National University In Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@ franko.lviv.ua

The parameters method for definition of the “maximum” domains which are free of real zeros of algebraic polinomials of two real variables has been considered. Using this method, for each polinomial it is always possible define from two to eight “maximum” domains which are free of zeros

Key words: method of parameters, localization of the roots, algebraic polinomials of two real variables

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2001
Прийнята до друку 12.03.2002