

УДК 517.9

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ БІЛОГО ШУМУ НА РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

О. Бігун, М. Притула

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: ktop@franko.lviv.ua

Досліджено вплив білого шуму на поширення поодинокого солітону. Розглянуто стохастичне рівняння Кортевега–де Фріза з початковою умовою та умовою періодичності. Запропонована числова схема, адаптована для випадку наявності у рівнянні Кортевега–де Фріза шумового члена. Наведено результати числових експериментів.

Ключові слова: стохастичне рівняння Кортевега–де Фріза; білий шум; солітони

Протягом останніх десятиліть розроблено низку числових [3-5] та аналітичних [2] методів розв'язування стохастичних нелінійних еволюційних рівнянь. Ми пропонуємо адаптацію числової схеми, застосованої в [4], на випадок наявності у рівнянні Кортевега-де Фріза (КдФ) випадкового члена, що моделює білий шум. Схему застосовано для дослідження впливу шумового члена на поширення поодинокого солітону.

Рівняння КдФ [1]

$$u_t + uu_x + \varepsilon u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

моделює поширення хвиль на поверхні мілкої безвихорної рідини за припущення, що довжина хвилі більша від глибини рідини, яка, відповідно, більша від амплітуди хвилі.

Розглянемо стохастичне рівняння КдФ

$$u_t + uu_x + \varepsilon u_{xxx} = \gamma \xi(x, t), \quad x \in [0, L], t \in [0, T], \quad (2)$$

де $\varepsilon > 0$ – деяка стала, що характеризує крутість хвилі; $\gamma > 0$ – амплітуда шуму; $\xi(x, t)$ – стохастичний процес, що моделює шум. Розглядатимемо білий шум $\eta(x, t)$, під яким розумітимемо δ -корельований за часом і простором стохастичний процес:

$E\eta(x, t)\eta(y, s) = \delta_{x-t}\delta_{y-s}$. Формально визначимо його як $\eta(x, t) = \frac{dW}{dt}$, де

$$W(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(t) e_i(x) \quad (3)$$

стохастичний процес Вінера, $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – послідовність незалежних броунівських рухів, $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – ортонормований базис простору $L^2_{(0,L)}$. Прийmemo $\xi(x, t) = \Phi \eta(x, t)$, де Φ – лінійна карта з $L^2_{(0,L)}$ у $L^2_{(0,L)}$.

Розв'язуватимемо рівняння (2) з початковою умовою

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4)$$

та умовою періодичності

$$u(x, t) = u(x + L, t). \quad (5)$$

Уведемо розбиття часового проміжку $[0, T]$: $\Omega_t = \bigcup_{n=1}^M [t_{n-1}, t_n]$, $t_n = n\tau$, де $\tau = T/M$ – крок розбиття. Введемо нові невідомі функції $v = u_x$ та $w = v_x$. Позначимо $u^n(x) := u(x, t_n)$, аналогічно позначимо $v^n(x)$ та $w^n(x)$. Виконаємо часову дискретизацію задачі (2), (4), (5) за допомогою схеми Кранка-Ніколсона:

$$\begin{cases} u^{n+1} - u^n + \tau \left(\varepsilon \frac{\partial w^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1/2})^2 \right) = \gamma \Phi(W^{n+1} - W^n), \\ \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x} = v^{n+1/2}, \\ \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x} = w^{n+1/2}, \end{cases} \quad (6)$$

де $u^{n+1/2} = 1/2(u^{n+1} + u^n)$, аналогічно визначено $v^{n+1/2}$, $w^{n+1/2}$, $n = \overline{1, M}$. Запровадивши у розгляд останні два рівняння системи (6), ми позбулися похідної третього порядку $\partial^3 u^{n+1/2} / \partial x^3$ у першому з рівнянь цієї системи. Тому у разі просторової дискретизації задачі можемо тепер використовувати скінченні елементи першого порядку. На підставі (3) можемо записати випадковий член першого з рівнянь (6) у вигляді $\Phi(W^{n+1} - W^n) = \sqrt{\tau} \sum_{i \geq 0} (\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)) \Phi e_i$. Оскільки різниця значень броунівського руху в різних точках є нормально розподіленою випадковою змінною, то останню рівність перепишемо як

$$\Phi(W^{n+1} - W^n) = \sqrt{\tau} \sum_{i \geq 0} \chi_{i,n}^\tau \Phi e_i, \quad (7)$$

де $\{\chi_{i,n}^\tau\}_{i,n}$ – послідовність незалежних стандартно нормально розподілених випадкових змінних.

Уведемо розбиття просторового проміжку $[0, L]$: $\Omega_x = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$, $x_i = ih$, де $h = L/N$ – крок розбиття. Наблизимо функції u^{n+1} , v^{n+1} , w^{n+1} лінійними комбінаціями базисних кусково-лінійних функцій $\{\varphi_i\}_{i=\overline{1, N}}$ таких, що $\varphi_i(0) = \varphi_i(L)$:

$$u^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} \varphi_i(x), \quad v^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^N v_i^{n+1} \varphi_i(x), \quad w^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^N w_i^{n+1} \varphi_i(x), \quad (8)$$

де для $i = \overline{1, N-1}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ (x_{i+1} - x)/h, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} (x - x_{N-1})/h, & x_{N-1} \leq x \leq x_N, \\ (x_{N+1} - x)/h, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x_1 < x < x_{N-1}. \end{cases}$$

Підставивши (8) у систему (6) та скалярно домноживши отримані рівності на базисні кусково-постійні функції $\{\psi_j\}_{j=1,\overline{N}}$, $\psi_j = \begin{cases} 1, & x_{j-1} \leq x \leq x_j; \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \end{cases}$ отримаємо систему нелінійних рівнянь відносно $u_i^{n+1}, v_i^{n+1}, w_i^{n+1}$, $i = \overline{1, N}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (u_i^{n+1} - u_i^n) \alpha_{ij} + \varepsilon \tau \sum_{i=1}^N w_i^{n+1/2} \beta_{ij} + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^N (u_i^{n+1/2})^2 \beta_{ij} = \gamma \sqrt{\tau} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\varphi_i\|} \chi_{i,n}^{h,\tau} \alpha_{ij}, \\ \sum_{i=1}^N u_i^{n+1/2} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^N v_i^{n+1/2} \alpha_{ij}, \\ \sum_{i=1}^N v_i^{n+1/2} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^N w_i^{n+1/2} \alpha_{ij}, \end{cases} \quad (9)$$

де $j = \overline{1, N}$, $\alpha_{ij} = (\varphi_i, \psi_j)_{L^2_{(0,L)}}$, $\beta_{ij} = (d\varphi_i/dx, \psi_j)_{L^2_{(0,L)}}$, $\chi_{i,n}^{h,\tau}$ – випадкові числа, взяті зі стандартно нормально розподіленої генеральної сукупності. Випадкове число χ з нормально розподіленої генеральної сукупності отримуємо як розв’язок рівняння $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\chi e^{-x^2/2} dx = \xi - 1/2$, де ξ – випадкове число з рівномірно розподіленої генеральної сукупності, яке можна отримати з датчика випадкових чисел ЕОМ.

Зауважимо, що в процесі просторової дискретизації рівність (7) ми замінили рівністю $\Phi(W_h^{n+1} - W_h^n) = \sqrt{\tau} \sum_{i=1}^N \chi_{i,n}^h \varphi_i / \|\varphi_i\|_{L^2_{(0,L)}}$. Оскільки система функцій $\{\varphi_i\}_{i=1,\overline{N}}$ не є ортогональною, то останній вираз моделюватиме вже не білий шум, а однорідний шум з малою довжиною кореляції.

Систему (9) для кожного часового індексу n розв’язуємо методом Ньютона. У цьому разі як початкове наближення розв’язку вибираємо розв’язок системи (9) на попередньому часовому шарі. Початковим наближенням на першому часовому шарі будуть значення функції та її похідних у вузлах сітки, отримані з початкової умови (4): $u_i^0 = u_0(x_i)$, а v_i^0, w_i^0 визначимо зі співвідношень

$$\sum_{i=1}^N v_i^0 \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^N u_k^0 \beta_{kj}, \quad \sum_{i=1}^N w_i^0 \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^N v_k^0 \beta_{kj}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Перш ніж застосовувати описану схему для дослідження впливу однорідного шуму на розв’язки задачі (2),(4),(5), її протестовано для детермінованої задачі (1), (4), (5). Для перевірки точності обчислень уведено абсолютну та відносну похибки $\varepsilon_u = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_i^j|$, $\eta_u = \varepsilon_u / \max_{i,j} |u_i^j|$, де $u(x_i, t_j)$ – точне значення функції u в точці (x_i, t_j) . Аналогічно записано похибки обчислення функцій $v = u_x$ та $w = v_x$. Крім того, для контролю обчислень використано закони збереження рівняння КдФ – функціонали, залежні від розв’язку рівняння, що є незмінними в часі. Рівняння КдФ має нескінченну ієрархію законів збереження. Перші чотири з них мають вигляд [1]

$$I_1(t) = \int_0^L u(x,t) dx, I_2(t) = \int_0^L u^2(x,t) dx,$$

$$I_3(t) = \int_0^L \left(\frac{u^3(x,t)}{3} - \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx, I_4(t) = \int_0^L \left(\frac{u^4}{4} + \frac{9}{5} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 3\varepsilon u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx.$$

Тестова задача (поодинокий солітон). Відомий точний розв'язок рівняння (1) [1]

$$u(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[(x-x_0)-ct]), \quad (10)$$

де c – швидкість хвилі; x_0 – її центр; $k = \sqrt{c/(4\varepsilon)}$. Хвиля, яку описує формула (10), є поодиноким солітоном (поширюється у просторі без зміни профілю). Розв'яжемо задачу (1), (4), (5) при $u_0(x) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x-x_0))$. Точний розв'язок цієї задачі, очевидно, задає формула (10), тобто можемо порівняти наближені значення функції u з точними. За умов $h = \tau = 0.1$, $\varepsilon = 1$ отримано такі результати:

$$\varepsilon_u = 9.47\text{E-}3, \eta_u = 1.06\%; \quad \varepsilon_v = 1.84\text{E-}3, \eta_v = 3.06\%; \quad \varepsilon_w = 1.45\text{E-}1, \eta_w = 9.15\%.$$

Для розв'язування системи (9) на кожному часовому шарі потрібно було провести дві-три ітерації методу Ньютона. Закони збереження на різних часових шарах відрізнялися не більше, ніж на $1\text{E-}5$ (див. таблицю).

Результати тестувань засвідчили, що похибки обчислень не сумірні зі значеннями функції u у вузлах, а також, що запропонована схема не вносить вагомих збурень у закони збереження рівняння (1).

Закони збереження рівняння КдФ у різні моменти часу t

t	$I_1(t)$ (E-1)	$I_2(t)$ (E-1)	$I_3(t)$ (E-1)	$I_4(t)$ (E+2)
0.1	8.94326175058667	7.99846078109345	2.32688972453674	1.55084840989960
0.4	8.94326175058668	7.99846078109424	2.32688920104325	1.55084860913756
0.7	8.94326175058667	7.99846078109425	2.32688935407951	1.55084849621968
1	8.94326175058667	7.99846078109346	2.32688959534574	1.55084847638271

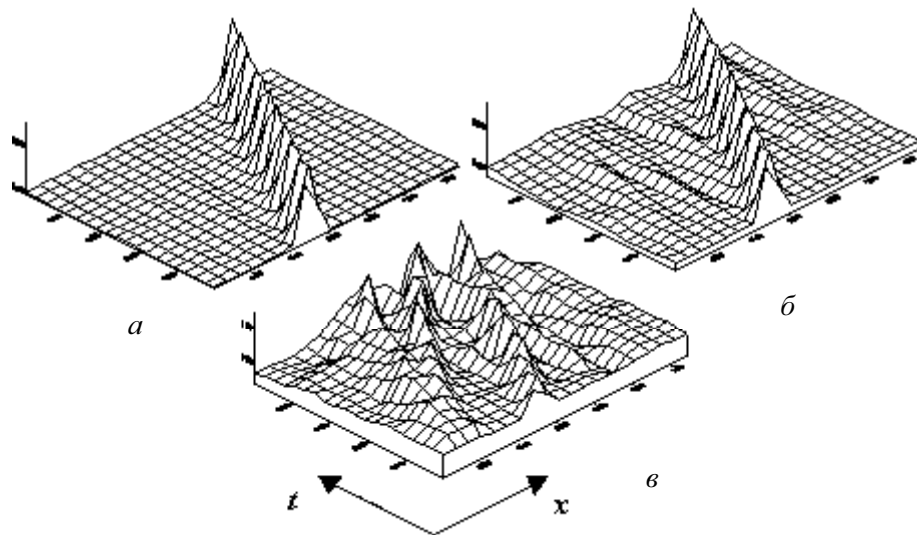
Далі розв'язано стохастичну задачу (2), (4), (5) з початковим профілем у вигляді поодинокого солітону $u_0(x) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x-x_0))$. Розв'язки цієї задачі дають змогу з'ясувати, як впливають стохастичні збурення у вигляді білого шуму на поширення поодинокого солітону.

Ця задача розв'язана для амплітуди шуму $\gamma = 0$, $\gamma = 10^{-3}$ та $\gamma = 10^{-2}$.

Результати, отримані за допомогою числових обчислень за значень параметрів $\varepsilon = 10^{-4}$, $h = \tau = 0.02$, $c = 0.3$, $x_0 = 0.5$, зображені на рисунку.

Закони збереження для детермінованої задачі ($\gamma = 0$) відрізняються між собою на різних часових шарах не більше ніж на $1\text{e-}5$. Проте вже при $\gamma = 10^{-2}$ закони збереження на різних часових шарах суттєво відрізняються між собою, тобто можна говорити, що солітон вступає у непружну взаємодію із хвилями, які утворює шум унаслідок самоорганізації (руйнуються інваріанти детермінованого рівняння). З

рисунка видно, що при амплітуді шуму $\gamma = 10^{-2}$ солітон не руйнується, та внаслідок такої непружної взаємодії з шумом з'являються додаткові хвилі. Крім того, аналіз значення амплітуди хвилі у вузлах розбиття засвідчив, що є незначне зміщення центра солітону ліворуч.



Розв'язки задачі (2), (4), (5) з початковою умовою у вигляді поодинокого солітону в разі амплітуди шуму $\gamma=0$ (а), $\gamma=10^{-3}$ (б) та $\gamma=10^{-2}$ (в)

Отже, запропонована адаптація числової схеми для розв'язування задачі (2), (4), (5) дає змогу дослідити вплив шумового члена на поширення розв'язків рівняння (1). Ми розглянули розв'язок рівняння (1) у вигляді поодинокого солітону (10). Проте описана тут схема застосовна для дослідження шумового впливу також і на інші розв'язки рівняння (1), зокрема у вигляді зіткнення двох чи більше солітонів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Прикарпатский А. К. , Микитюк И. В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К., 1991.
2. Притула Н., Прикарпатский А. Банахова группа Ли токов $Y \times \text{Diff}(S^1)$ на окружности S^1 как группа инвариантности стохастических нелинейных уравнений Кортвега – де Фриза // Мат. физика и нелинейн. Механика. 1990. Т. 13. С. 69-72.
3. Sanz – Serna J. M., Verwer J. G. , Conservative and nonconservative schemes for the solution of the nonlinear Schrödinger equation // IMA J. Num. Anal. 1986. Vol. 6, P. 25-42.
4. Debussche A., Printems J., Numerical simulation of the stochastic Korteweg – de Vries equation, Mathematiques , Universite de PARIS-SUD 01, 1999.

5. Kloeden P., Platten E., Numerical solution of stochastic differential equations, Applications of Mathematics 23, Springer Verlag, 1992.

**NUMERICAL SIMULATION OF THE WHITE NOISE INFLUENCE
TO THE SOLUTIONS OF THE KORTEVEG – DE VRIES EQUATION**

O. Bihun, M. Prytula

*Ivan Franko National University In Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: ktop@franko.lviv.ua*

The influence of white type noise to the propagation of single soliton is investigated. The stochastic Kortevæg – de Vries equation with initial and periodic conditions is considered. Numerical scheme adapted to the case of noise term presence in equation is proposed. Results of numerical experiments are given.

Key words: stochastic Kortevæg – de Vries equation; white noise; solitons

*Стаття надійшла до редколегії 15.11.2001
Прийнята до друку 12.03.2002*