ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *Серія прикладна математика та інформатика. 2000. Вип. 3. С. 58-62*

VISNYK LVIV UNIV. *Ser. Applied Mathematics and Computer Science. 2000. No 3. P. 58-62*

УДК 512.64

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕННИХ РІВНЯНЬ

В.М.Прокіп

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова 3-Б, м. Львів, 79053, e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua

Нехай R – комутативне кільце з одиничним елементом 1. Позначимо: R_n і $R_n[x]$ – кільця $(n\times n)$-матриць над R і кільцем многочленів $R[x]$ відповідно, I – одинична, O – нульова $(n\times n)$– матриці.

Загальновідома роль матричного многочленного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1}A_1 + ... + XA_{s-1} + A_s = 0; \quad A_i \in R_n, \tag{1}$$

де $i = 0, 1, ..., s$; $X \in R_n$ – невідома матриця, у теорії систем диференціальних рівнянь, а також для розв'язування багатьох прикладних задач у математиці, економіці, теорії електричних ланцюгів тощо. Наша мета– вказати умови розв'язності матричного рівняння (1), а у випадку його існування вказати алгоритм побудови шуканого розв'язку.

Відомо [1, 6], що матриця $B \in R_n$ – розв'язок рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли многочленна матриця $A_0x^s + A_1x^{s-1} + ... + A_{s-1}x + A_s = 0$, $A_i \in R_n$, допускає зображення у вигляді $A(x) = (Ix - B)C(x)$. З останньої рівності одержуємо $\det A(x) = \det(Ix - B)\det C(x)$. Надалі паралельно з рівнянням (1) завжди розглядатимемо многочленну матрицю $A(x)$, а його розв'язок шукатимемо з наперед заданим характеристичним многочленом $\det(Ix - B) = b(x) = x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n$. Отже, пошук розв'язків рівняння (1) можна розділіти на частини, шукаючи спочатку зображення $\det A(x)$ у вигляді $\det A(x) = b(x)c(x)$, а потім намагатися знайти такі факторизації матриці $A(x) = (Ix - B)C(x)$, для яких $\det(Ix - B) = b(x)$.

Матричному рівнянню (1) і многочлену $b(x) = x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n$, $b(x) = R[x]$, ($b(x) \mid \det A(x)$ (ділить)), поставимо у відповідність такі матриці:

$$N = \left\| A_0b_1 - A_1, ..., A_0b_s - A_s, ..., A_0b_{s+1}, ..., A_0b_n, \underbrace{O, ..., O}_{t} \right\|, \; t = (n + s - 1) - \max\{n, s\},$$

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s & & & \\ & A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s & & \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s \\ I & Ib_1 & \dots & Ib_{n-1} & Ib_n & & & \\ & I & Ib_1 & \dots & Ib_{n-1} & Ib_n & & \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & I & Ib_1 & \dots & Ib_{n-1} & Ib_n \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} n-1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} s-1 \end{array}.$$

Теорема 1. *Для рівняння (1) існує розв'язок* $X_0 = B$ *з характеристичним многочленом* $b(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$*, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

а) рівняння $ZM = N$ *розв'язне;*

б) серед розв'язків цього рівняння існує розв'язок $Z_0 = \|D_1, D_2, \dots, D_{n-1} - C_1 - C_2 \dots C_{s-1}\|$, $D_i, C_j \in R_n$; $i = 1, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, s-1$, *такий, що для матриці* $B = D_1 - Ib_1$ *виконуються співвідношення* $D_j - D_{j-1}B = Ib_j$ *для всіх* $2 \le j \le n$, $(D_n = 0)$*; і* $\det(Ix - B) = b(x)$.

Доведення. Необхідність. Якщо матриця $X_0 = B$, $\det(Ix - B) = b(x)$ - розв'язок рівняння (1), то $A(x) = (Ix - B)C(x)$. Приймемо, що многочленна матриця $D(x) = Ix^{n-1} + D_1 x^{n-2} + \dots + D_{n-1}$ є взаємною до матриці $B(x) = Ix - B$, тобто $D(x)(Ix - B) = Ib(x)$. Враховуючи [5], неважко переконатись у тому, що $D(x)A(x) = b(x)C(x)$. З останньої рівності випливає розв'язність рівняння $ZM = N$.

Достатність. Нехай серед розв'язків рівняння $ZM = N$ існує розв'язок

$$Z_0 = \|D_1, D_2, \dots, D_{n-1} - C_1 - C_2 \dots C_{s-1}\|, \quad D_i, C_j \in R_n;\ i = 1, \dots, n-1; \quad j = 1, \dots, s-1$$

такий, що для матриці $B = D_1 - Ib_1$ справджуються рівності: $D_j - D_{j-1}B = Ib_j$ для всіх $2 \le j \le n$, $(D_n = 0)$; і $\det(Ix - B) = b(x)$. Тоді для матриці $D(x) = Ix^{n-1} + D_1 x^{n-2} + \dots + D_{n-1}$ виконується $D(x)B(x) = Ib(x)$. На підставі [5] отримуємо, що для матриць $D(x)$ та $A_0 x^{s-1} + C_1 x^{s-2} + \dots + C_{s-1}$ виконуються співвідношення $D(x)A(x) = C(x)b(x)$. Тепер легко бачити, що $A(x) = (Ix - B)C(x)$. З останнього випливає розв'язність рівняння (1).Теорему доведено.

Зауваження. Якщо за умов теореми 1 серед розв'язків рівняння $ZM = N$ існує такий, що $D(x)B(x) = Ib(x)$, то матриця $B = D_1 - Ib_1$ є розв'язком рівняння (1). Проте його характеристичний многочлен може не співпадати з $b(x)$. Крім цього, із доведення достатності теореми 1 отримуємо метод побудови розв'язку рівняння (1), який будують за розв'язком рівняння $ZM = N$.

Надалі R - область цілісності, а P – поле, яке містить область $R : R \subseteq P; d_A^k(x)$ – найбільший спільний дільник (НСД) мінорів k - го порядку матриці $A(x)$ над полем P.

Нижче вкажемо клас матриць із $R_n[x]$, для якого розв'язність рівняння $ZM = N$ буде і достатньою умовою розв'язності рівняння (1).

Теорема 2. *Нехай для рівняння (1)* $rangA(x) \geq n-1$. *Нехай далі для унітального многочлена* $b(x) \in R[x]$ *степеня* n $(b(x) \,/\det A(x))$ *виконується* $(b(x),\ \det A(x)/b(x),\ d_A^{n-1}(x)) = 1$ *(над полем* P*). Для рівняння* (1) *існує розв'язок* $X_0 = B$ *із заданим характеристичним многочленом* $b(x)$*, тоді і тільки тоді, коли рівняння* $ZM = N$ *розв'язне над* R. *Якщо ж шуканий розв'язок існує, то він єдиний із заданим* $b(x)$.

Доведення. Необхідність доводиться тими ж методами, що і в теоремі 1.

Достатність. Якщо рівняння $ZM = N$ розв'язне, то існують матриці $C(x) = A_0 x^{s-1} + C_1 x^{s-2} + ... + C_{s-1}$ та $D(x) = Ix^{n-1} + D_1 x^{n-2} + ... + D_{n-1}$ такі, що $D(x)A(x) = C(x)b(x)$.

Якщо $rangA(x) = n$, то на підставі [3] для $A(x)$ над полем P існує факторизація $A(x) = (Ix - B)C(x)$, де $B \in P_n$, причому $\det(Ix - B) = b(x)$ і $D(x)(Ix - B) = Ib(x)$. Оскільки $D(x) \in R_n[x]$, то з останньої рівності випливає, що $B \in R_n$. Отже, $X_0 = B$ – розв'язок рівняння (1) над кільцем R. Єдиність цього розв'язку випливає з [4].

Розгленемо випадок, коли $rangA(x) = n-1$. Для доведення теореми в цьому випадку нам потрібна така лема.

Лема. *Нехай* $A,\ C \in G_n$, $rangA(x) \geq k$, $D \in G_n$, $\det D \neq 0$, *(*G *- область головних ідеалів). Нехай далі* $DA = \delta C$*, де* $\delta \in G$. *Якщо* $(d_A^k, \delta) = 1$*, то* $D = D_2 D_1$*, де* $D_1 \in G_n$, $\det D_1 = \delta^k$.

Доведення. Нехай $UAV = diag(a_1, ..., a_k, a_{k+1} ...)$ - канонічна діагональна форма матриці A, тобто $a_j \mid a_{j+1}$ і $U, V \in GL(n, G)$. Тоді

$$DU^{-1} diag(a_1, ..., a_k, a_{k+1} ...) = \delta CV \tag{2}$$

Для матриці DU^{-1} існує зворотна матриця W така, що

$$WDU^{-1} = \begin{Vmatrix} h_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & & ... & & ... \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & ... & h_{nn} \end{Vmatrix}$$

- нижня трикутна матриця. Тепер рівність (2) запишемо в розгорнутому вигляді:

$$\delta WCV = \begin{Vmatrix} h_{11}a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}a_1 & h_{22}a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ h_{n1}a_1 & h_{n2}a_2 & \dots & \dots & h_{nn}a_n \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $(d_A^k, \delta) = 1$, то $(a_j, \delta) = 1$ для всіх $j \le k$. Отже $h_{lj} = \delta t_{lj}$ для всіх $l \le n,\ j \le k$. Як бачимо $D = D_2 D_1$, $D_1 = diag(\underbrace{\delta,\dots,\delta}_{k},1,\dots,1)$, що і доводить лему.

Надалі для спрощення запису змінну x опускатимемо і розумітимемо, що всі елементи належать $P[x]$.

Нехай $UAV = F_A = diag(a_1,\dots,a_{n-1},0)$ - канонічна діагональна форма матриці $A(x)$ над полем P і $U,V \in GL(n,P[x])$. Тоді рівність $D(x)A(x) = C(x)b(x)$ над полем P рівносильна такій рівності: $DU^{-1}diag(a_1,\dots,a_{n-1},0) = CV^{-1}b$. Звідси на підставі леми випливає $DU^{-1} = diag(b,\dots,b,1)W$. Оскільки $\deg\det D(x) = n(n-1)$, то легко бачити, що $W \in GL(n,P[x])$. Очевидно, що для матриці $G = diag(1,\dots,1,b)W^{-1}$ виконується $DU^{-1}G = Ib$.Звідси здобуваємо, що $U^{-1}(x)G(x) = Ix - B$ – матриця з характеристичним многочленом $b(x)$, причому $B \in R_n$. Тому $DA = DU^{-1}F_A V^{-1} = DU^{-1}diag(1,\dots,1,b)W^{-1}WF_A V^{-1} = DBC.$ Отже, $A(x) = (Ix - B)C(x)$ і матриця $B \in R_n$ – розв'язок рівняння (1).

Доведемо, що шуканий розв'язок однозначно визначений многочленом $b(x)$. Нехай $B_1 \in R_n$ - інший розв'язок рівняння (1) із заданим $b(x)$. Неважко переконатись, що над полем P виконується $Ix - B_1 = U^{-1}(x)diag(1,\dots,1,b(x))W_1(x)$. Отже, $Ix - B_1 = (Ix - B)Q(x)$, що можливо лише при $Q = I$. А тому за умов теореми 2 рівняння (1) має єдиний розв'язок із заданим характеристичним многочленом $b(x)$. Теорему доведено.

Наслідок. Нехай для рівняння (1) $rangA(x) \ge n-1$ і $d_A^{n-1}(x)) = 1$ (над полем P). Нехай далі $b(x) \in R[x]$ унітальний многочлен степеня n $(b(x) \mid \det A(x))$. Для рівняння (1) існує розв'язок $X_0 = B$ із заданим характеристичним многочленом $b(x)$, тоді і тільки тоді, коли рівняння $ZM = N$ розв'язне над R. Якщо ж шуканий розв'язок існує, то він єдиний із заданим $b(x)$.

Загальна схема шукання розв'язків із заданим характеристичним многочленом рівняння (1) полягає у знаходженні певних розв'язків рівняння $ZM = N$. Якщо матриця $Z_0 = \|D_1, D_2, \dots, D_{n-1} - C_1 - C_2 \dots C_{s-1}\|$ – розв'язок цього рівняння, то для відшукання розв'язків рівняння (1) досить перевірити виконання умови *б* теореми 1. Щодо цього зазначимо, що алгоритм теореми 1 є ефективним у випадку, коли кільце R має скінченну кількість елементів (скінченне поле, скінченне кільце або кільця многочленів над ним). Ефективнішим цей метод є у випадку, коли $(b(x),$ $\det A(x)/b(x),\ d_A^{n-1}(x)) = 1$, оскільки за заданих умов розв'язність рівняння (1) рівносильна розв’язності рівняння $ZM = N$. Якщо ж матриця $Z_0 = \| D_1, D_2, ..., D_{n-1} - C_1 - C_2 ... C_{s-1} \|$ є розв’язком цього лінійного рівняння, то матриця $B = D_1 - Ib_1$ – розв’язок рівняння (1) із заданим характеристичним многочленом.

Зазначимо, що наведені умови розв’язності та запропонований алгоритм їхнього пошуку має перевагу порівняно з методами, викладеними в [2]. По-перше, у [2] етапи алгоритму розв’язання рівняння (1) ґрунтуються на ортогональних перетвореннях, що можливо лише для матриць над полем дійсних або комплексних чисел. По-друге, в запропонованому нами алгоритмі шукання розв’язків можна застосовувати не тільки для рівняння (1) над полем дійсних або комплексних чисел, а й над ширшими областями. Зокрема, коли елементами матриць рівняння (1) є цілі числа або многочлени від декількох змінних з дійсними чи цілочисловими коефіцієнтами, тобто над кільцями, кожен елемент яких допускає зображення у вигляді добутку незвідних співмножників (факторіальними кільцями).

Отримані результати можна використати до відшукання розв’язків рівняння (1) у вигляді $X = diag(X_1, X_2)$, де X_j – квадратні матриці. Крім цього, здобуті результати знаходять безпосереднє застосування при розв’язуванні матричного рівняння вигляду $XAX + XB + CX + D = 0$; $A, B, C, D \in R_n$, а $X \in R_n$ - невідома матриця, (зокрема для розв'язування матричного алгебричного рівняння Ріккаті [2]). Легко показати: якщо матриця A – неособлива, то лінійною заміною $Z = XA + C$ це рівняння зводиться до рівняння вигляду $Z^2 A_0 + ZA_1 + A_2 = 0$; $A_i \in R_n$.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966.
2. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984.
3. *Петричкович В.М., Прокип В.М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журн.– 1986. Т. 38,– № 4.– С. 478-483.
4. *Прокіп В.М.* Про єдиність унітального дільника матричного многочлена над довільним полем . // Там же– 1993.Т. 45,– № 6.– С. 803– 808.
5. *Прокіп В.М.* Про факторизацію многочленних матриць над областю головних ідеалів// Укр. мат. журн.– 1996. Т. 48,– № 10.– С. 1435-1439.
6. *Brown W.C.* Matrices over commutative rings. – N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1993.

ON SOLVABILITY OF MATRIX POLYNOMIAL EQUATIONS

V.M.Prokip

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Naukova str, 3-b, Lviv, 79053, e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua

The conditions are found for existence of solutions with a given characteristic polynomial.

Key words: matrix; polynomial; equation; solution.

Стаття надійшла до редколегії 2.10.2000
Прийнята до друку 3.11.2000