ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикладна математика та інформатика. 2001. Вип. 2. С. 126-134
Ser. Applied Mathematics and Computer Science. 2001. No 2. P. 126-134

УДК 519.6:517:925

АНАЛІЗ КОРЕКТНОСТІ ЗМІШАНИХ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ В ТЕРМІНАХ ШВИДКОСТЕЙ

Я. Кондратюк, Г. Шинкаренко

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна, e-mail: kis@franko.lviv.ua

1. Вступ.

Багато авторів розглядали різні змішані варіаційні формулювання лінійної теорії пружності (див., наприклад, праці [1-6]). Тут ми розглянемо змішану варіаційну постановку початково-крайової задачі лінійної теорії пружності для матеріалів з короткочасною пам'яттю (модель Кельвіна-Фойгхта) в термінах невідомих швидкостей і пружних складових тензора напружень. Такий підхід має такі переваги порівняно з традиційною моделлю в термінах невідомих переміщень:

(i) дозволяє пряму апроксимацію пружних складових тензора напружень;
(ii) більш гнучкий вибір скінченно-елементних апроксимацій;
(iii) можливість застосування до моделювання нестисливих і майже нестисливих матеріалів;
(iv) багатообіцяючий з огляду на застосування до чисельного моделювання більш загальних і складних проблем, наприклад, задач пластичності, в яких питання виключення компонент напружень з невідомих є складним;
(v) має переваги в чисельному моделюванні взаємодії пружного тіла з рідиною, коли рух рідини описується рівняннями в термінах невідомого вектора швидкостей і тиску. Зокрема, відомо [7], що постановка задач акустичної взаємодії ідеальних середовищ у термінах невідомих переміщень потребує застосування базисних функцій МСЕ із простору $H(\mathrm{div},\Omega_F)$ типу Рав'яра-Тома та Бреззі-Дугласа-Маріні [8], де Ω_F – область, яку займає рідина. В той же час вектор переміщень пружного тіла апроксимується функціями з $H^1(\Omega_S)$, що значно ускладнює реалізацію схем МСЕ. Використання апроксимацій із $H^1(\Omega)$ для відшукання вектора переміщень як у рідині, так і в пружному тілі викликає появу "spurious modes" [9, 10]. У цьому випадку змішані варіаційні формулювання дають змогу уникнути ускладнень, пов'язаних із зазначеними проблемами [11, 12].

Дослідимо питання коректності запропонованої нами еволюційної змішаної варіаційної задачі теорії пружності.

2. Постановка початково-крайової задачі.

Розглянемо початково-крайову задачу лінійної теорії пружності для матеріалів з короткочасною пам'яттю (модель Кельвіна-Фойгхта).

Нехай пружне тіло займає обмежену зв'язну область Ω точок $x=(x_1,x_2,x_3)$ евклідового простору $\Re^3$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ.

Рух пружного тіла описується такою системою рівнянь [14]:

$$\begin{aligned} &\rho u_i' - \frac{\partial}{\partial x_j}\{\sigma_{ij} + s_{ij}\} = \rho f_i, \\ &A_{ijkm}\sigma_{km}' - e_{ij}(u) = 0, \\ &s_{ij} = c_{ijkm}e_{km}(u), \\ &e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad в \quad \Omega \times (0,T], \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $\varphi' = \frac{\partial}{\partial t}\varphi$, $u(x,t)=\{u_i(x,t)\}^3_{i=1}$- вектор швидкості пружного тіла, $\sigma=\{\sigma_{ij}(x,t)\}^3_{i,j=1}$- компоненти тензора пружних напружень, $\rho=\rho(x)$- густина маси тіла, $s=\{s_{ij}(x,t)\}^3_{i,j=1}$ - компоненти тензора в'язких напружень, $f(x,t)=\{f_i(x,t)\}^3_{i=1}$ - вектор заданих об'ємних сил, коефіцієнти $\{A_{ijkm}\}$ утворюють обернений тензор до тензора модулів пружності $\{a_{ijkm}\}$. За індексами, що повторюються, в (1) і скрізь далі передбачається підсумовування від 1 до 3. Припускатимемо, що коефіцієнти $\{A_{ijkm}\}$ та $\{c_{ijkm}\}$ задовільняють звичайним умовам симетрії та еліптичності [14].

Доповнимо (1) крайовими та початковими умовами

$$\begin{aligned} &u = 0 \quad на \quad \Gamma_u \times [0,T], \quad \Gamma_u \subset \Gamma, \quad mes(\Gamma_u) > 0 \\ &(\sigma_{ij} + s_{ij})n_j = \hat{\sigma}_i \quad на \quad \Gamma_\sigma \times [0,T], \quad \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$u_{|t=0} = u^0, \quad \sigma_{ij|t=0} = \sigma^0_{ij} \quad в \quad \Omega, \tag{2.3}$$

де $n=(n_1, n_2, n_3)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ, $\{\sigma^0_{ij}\}$та u^0 - задані значення тензора напружень і вектора швидкостей пружного тіла в початковий момент часу $t=0$.

<u>Зауваження 1.1</u> Звичайно, в еволюційних задачах теорії пружності замість початкового розподілу напружень $\{\sigma^0_{ij}\}$ визначають початковий розподіл вектора зміщень

$$d_{|t=0} = d^0 в\ \Omega.$$

У цьому випадку ми знайдемо необхідні $\{\sigma^0_{ij}\}$ згідно із звичайним законом Гука.

$$\sigma^0_{ij} = a_{ijkm}e_{km}(d^0) \quad в \quad \Omega.$$

<u>3. Еволюційна змішана варіаційна задача теорії пружності.</u>

Введемо простори

$$\begin{aligned} &V = \left\{v \in H^1(\Omega)^3 \mid \quad v = 0 \quad на \quad \Gamma_u\right\}, \\ &\Xi = \left\{\{\tau_{ij}\}^3_{i,j=1} \in L^2(\Omega) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}\ в\ \Omega\right\}, \\ &H = L^2(\Omega)^3 \end{aligned}$$

та V'- спряжений простір до V.

Застосувавши принцип віртуальних робіт до задачі (1)-(3), одержимо таке її варіаційного формулювання:

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad l \in L^2(0,T;V'), \quad \sigma^0 \in \Xi, \quad u^0 \in H; \\ \textit{знайти} \quad \textit{пару} \quad p = \{u,\sigma\} \in L^2(0,T;V \times \Xi) \quad \textit{таку,} \quad \textit{що} \\ m(u'(t),v) + b(\sigma(t),v) + c(u(t),v) = < l(t),v > \quad \forall\, t \in (0,T], \\ a(\sigma'(t),\tau) - b(\tau,u(t)) = 0, \\ m(u(0)-u^0,v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ a(\sigma(0)-\sigma^0,\tau) = 0 \quad \forall\, \tau \in \Xi, \end{cases} \tag{3.1}$$

де неперервні білінійні форми $m(.,.)\colon H\times H\to\Re$, $c(.,.)\colon V\times V\to\Re$, $a(.,.)\colon\Xi\times\Xi\to\Re$, $b(.,.)\colon\Xi\times V\to\Re$ та лінійний функціонал $l\colon V\to\Re$ введені так:

$$\begin{aligned} &m(v,u) = m(u,v) = \int\limits_\Omega \rho u_i v_i dx \quad \forall u,v \in H, \\ &c(v,u) = c(u,v) = \int\limits_\Omega c_{ijkm} e_{ij}(u) e_{km}(v) dx \quad \forall u,v \in V, \\ &b(\sigma,v) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij} e_{ij}(v) dx \quad \forall\sigma \in \Xi,\, v \in V, \\ &a(\tau,\sigma) = a(\sigma,\tau) = \int\limits_\Omega A_{ijkm} \sigma_{ij} \tau_{km} dx \; \forall \sigma,\tau \in \Xi, \\ &< l,v > = \int\limits_\Omega f_i v_i dx + \int\limits_{\Gamma_\sigma} \widehat{\sigma}_i v_i d\gamma \;\forall v \in V. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Неважко переконатись, що за перелічених раніше умов форми $m(.,.)$, $a(.,.)$ та $c(.,.)$ є H-, Ξ- та V-еліптичні. Ці властивості, зокрема, дають змогу наділити функціональні простори H, Ξ ,V нормами

$$\begin{aligned} &\|\sigma\|_\Xi = a^{1/2}(\sigma,\sigma) \quad \forall \sigma \in \Xi, \\ &\|u\|_H = m^{1/2}(u,u) \quad \forall u \in H, \\ &\|u\|_V = c^{1/2}(u,u) \quad \forall u \in V. \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Енергетичне рівняння та апріорні оцінки.

Припустимо на цей момент, що сформульована змішана задача (3.1) має розв'язок (u,σ).

Покладемо у її рівняннях $\tau=\sigma(\xi)$, $v=u(\xi)$, додамо їх і проінтегруємо на проміжку $(0,t]$; у результаті одержимо таке рівняння:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\{\|\sigma(t)\|_\Xi^2 + \|u(t)\|_H^2\right\} + \int\limits_0^t \|u(\xi)\|_V^2 d\xi = \frac{1}{2}\left\{\|\sigma(0)\|_\Xi^2 + \|u(0)\|_H^2\right\} + \\ &\int\limits_0^t < l(\xi), v(\xi) > d\xi \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Із (4.1) видно, що введені норми мають цілком визначений фізичний зміст:

$\|\sigma(t)\|^2_\Xi/2$- значення потенціальної енергії пружного тіла,

$\|u(t)\|^2_H/2$- значення кінетичної енергії пружного тіла,

$\|u(t)\|^2_V$ - інтенсивність дисипації енергії в пружному тілі на момент часу t.

Тепер природно ввести на просторі $F=H\times\Xi$ норму

$$\|p\| = \sqrt{\|\sigma\|^2_\Xi + \|u\|^2_H} \quad \forall p = \{\sigma, u\} \in F\ . \tag{4.2}$$

Тоді $\frac{1}{2}\|p(t)\|^2$ є повною енергією пружного тіла в момент часу t. Остаточно енергетичне рівняння (4.1) можемо подати у такому вигляді:

$$\frac{1}{2}\|p(t)\|^2 + \int_0^t \|u(\xi)\|^2_V\, d\xi = \frac{1}{2}\|p(0)\|^2 + \int_0^t < l(\xi), u(\xi) > d\xi \ \forall t \in [0,T].$$

Враховуючи початкові умови задачі (3.1) і те, що $l\in L^2(0,T;V')$, матимемо оцінки

$$\|p(t)\|^2 + \int_0^t \|u(\xi)\|^2_V\, d\xi \le \|\sigma^0\|^2_\Xi + \|u^0\|^2_H + K\int_0^t \|l(\xi)\|^2_* d\xi \quad t \in [0,T], \tag{4.3}$$

де K=const>0 не залежить від величин, що нас цікавлять.

Аналізуючи отриману оцінку, переконуємося в тому, що справджується теорема 4.1.

<u>*Теорема 4.1*</u> про єдиність та обмеженість розв'язку змішаної варіаційної задачі теорії пружності.

Нехай існує розв'язок $p=\{u,\sigma\}$ варіаційної задачі (3.1). Тоді

(i) $u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$, $\sigma\in L^\infty(0,T;\Xi)$ і при цьому справджується апріорна оцінка (4.3) (остання свідчить про неперервну залежність розв'язку задачі від її даних);

(ii) розв'язок $p=\{v,\sigma\}$ задачі (3.1) єдиний.

Отже, стосовно коректності варіаційної задачі (3.1) залишається відкритим лише питання існування її розв'язку.

<u>5. Напівдискретизація Гальоркіна.</u>

Дослідження існування розв'язку варіаційної задачі (3.1) виконаємо з використанням її напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними.

Нехай $\{\Xi_h\}$, $\{W_h\}$ - послідовності скінченновимірних підпросторів такі, що

$\Xi_h\subset\Xi$, dim $\Xi_h=N=N(h)\to\infty$ при $h\to 0$,

$V_h\subset V$, dim $V_h=L=L(h)\to\infty$ при $h\to 0$

та Ξ_h (відповідно V_h) щільно вкладені в Ξ (відповідно V). Напівдискретні апроксимації Гальоркіна для (3.1) визначаються як розв'язки таких задач:

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad l \in L^2(0,T;V'), \quad \sigma^0 \in \Xi, \quad u^0 \in H \ \textit{та}\ h = const > 0; \\ \textit{знайти} \quad \textit{пару} \quad p_h = \{u_h, \sigma_h\} \in L^2(0,T;V_h \times \Xi_h) \quad \textit{таку,} \quad \textit{що} \\ m(u_h'(t), v) + b(\sigma_h(t), v) + c(u_h(t), v) = < l(t), v > \quad \forall\ t \in (0,T], \\ a(\sigma_h'(t), \tau) - b(\tau, u_h(t)) = 0, \\ m(u_h(0) - u^0, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \\ a(\sigma_h(0) - \sigma^0, \tau) = 0 \quad \forall\, \tau \in \Xi_h. \end{cases} \tag{5.1}$$

У просторах V_h та Ξ_h зафіксуємо базиси $\{\psi_i\}_{i=1}^L$ *та* $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ відповідно. Цей вибір дає змогу подати розв'язок (5.1) у вигляді лінійних комбінацій

$$u_h(x,t)=\sum_{i=1}^{L}u_i(t)\psi_i(x),$$
$$\sigma_h(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i(t)\varphi_i(x) \qquad (5.2)$$

з невідомими коефіцієнтами $S(t)=\{\sigma_i(t)\}^{N}_{i=1}$ та $U(t)=\{u_i(t)\}^{L}_{i=1}$. Відшукання останніх приводиться процедурою Гальоркіна до розв'язування наступної задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U'(t) \\ S'(t) \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U(t) \\ S(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}\ \forall t\in(0,T],$$
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U(0) \\ S(0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} U_0 \\ S_0 \end{Bmatrix}. \qquad (5.3)$$

Теорема 5.1 про коректність напівдискретної змішаної варіаційної задачі.

Для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h>0$ напівдискретна апроксимація Гальоркіна $p_h=\{u_h,\sigma_h\}\in L^2(0,T;V_h\times\Xi_h)$ однозначно визначається вибором базисів просторів V_h та Ξ_h і розв'язком задачі Коші (5.3), причому пари $p_h=\{u_h,\sigma_h\}$ задовольняють нерівності

$$\|p_h(t)\|^2+\int_0^t\|u_h(\xi)\|_V^2\,d\xi\le\|\sigma^0\|_\Xi^2+\|u^0\|_H^2+K\int_0^t\|l(\xi)\|_*^2\,d\xi \quad t\in[0,T]\ \forall h>0. \qquad (5.4)$$

де K=const>0 не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення цієї теореми ґрунтується на тому, що матриці $M=\{m(\psi_i,\psi_j)\}^{L}_{i,j=1}$ $A=\{a(\varphi_i,\varphi_j)\}^{N}_{i,j=1}$ є додатно визначеними. Цих властивостей досить, щоб задача Коші мала єдиний розв'язок. І, нарешті, як і в п.3, підстановка $\tau:=\sigma_h(t)$ і $v:=u_h(t)$ у рівняння задачі (5.1) дає змогу одержати апріорну оцінку (5.4).

Зауваження 5.1.

Однією із особливостей змішаних варіаційних задач є використання 'нетрадиційних просторів' [15]. У цьому випадку у процесі побудови підпросторів Ξ_h методом скінченних елементів потрібно врахувати те, що на компоненти тензора пружних напружень σ_{ij} не накладають ніяких умов неперервності [15, 16]. За цих умов необхідно будувати змішані скінченно-елементні апроксимації так, щоб виконувалась inf-sup умова (умова стійкості Бабушки-Бреззі) [8, 15]. Перевірка виконання цієї умови є найбільш складним питанням у змішаних варіаційних задачах. Допоміжним інструментом тут можуть бути чисельні inf-sup тести [17].

6. Існування розв'язку змішаної варіаційної задачі.

Розглянемо послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $\{p_h\}$, $p_h=\{\sigma_h,u_h\}$, які однозначно визначаються задачею (5.1) для кожного фіксованого $h>0$. З огляду на апріорну оцінку (5.4) дійдемо висновку , що

послідовність $\{u_h\}$ утворює обмежену множину в $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$,

послідовність $\{\sigma_h\}$ утворює обмежену множину в $L^\infty(0,T;\Xi)$.

Отже, із послідовності $\{p_h\}$ можна вибрати підпослідовність $\{p_\Delta\}$, яка збігається до деякого $p=(u,\sigma)$, а саме

$\sigma_\Delta\to\sigma$ в $L^\infty(0,T;\Xi)$ * слабко,

$u_\Delta\to u$ в $L^\infty(0,T;H)$ * слабко,

$u_\Delta \to u$ в $L^2(0,T;V)$ слабко.

Покажемо, що побудована в такий спосіб пара $p=\{v,\sigma\}$ задовільняє рівняння змішаної варіаційної задачі (3.1).

Виберемо $V_h \subset V_\Delta$, $\Xi_h \subset \Xi_\Delta$ і введемо простір

$\Phi(0,t_0)=\{\omega \in C^1([0,t_0]) \mid \omega(t_0)=0\}$ $t_0 \in [0,T]$,

та розглянемо функції

$$v_h = \sum_{i=1}^{L} \omega_i(t)\psi_i(x),$$

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(t)\varphi_i(x).$$

Підставляючи ці функції в рівняння напівдискретизованої задачі (5.1) та інтегруючи за часом, отримаємо

$$\int_0^{t_0} \{-m(u_\Delta, v_h') + b(\sigma_\Delta, v_h) + c(u_\Delta, v_h) - < l, v_h >\} dt =$$

$$-m(u_\Delta(0), v_h(0)) = -m(u^0, v_h(0)),$$

$$\int_0^{t_0} \{-a(\sigma_\Delta, \tau_h') - b(\tau_h, u_\Delta)\} dt = -a(\sigma_\Delta(0), \tau_h(0)) = -a(\sigma^0, \tau_h(0)).$$

Перейдемо тепер до границі при $\Delta \to 0$ та виконаємо інтегрування частинами

$$\int_0^{t_0} \{m(u', v_h) + b(\sigma, v_h) + c(u, v_h) - < l, v_h >\} dt =$$

$$-m(u(0) - u^0, v_h) \quad \forall \quad v_h \in V_h,$$

$$\int_0^{t_0} \{a(\sigma', \tau_h) - b(\tau_h, u)\} dt = -a(\sigma(0) - \sigma^0, \tau_h) \; \forall \tau_h \in \Xi_h \quad \forall h > 0, \forall t_0 \in [0,T].$$

Беручи до уваги те, що останні рівняння справджуються для довільних $t_0 \in [0,T]$ та всіх $h>0$, переконуємося, що границя $p=\{u,\sigma\}$ послідовності p_Δ задовольняє всі рівняння варіаційної задачі (3.1).

Отож, ми довели існування розв'язку варіаційної задачі і, отже, справджується теорема 6.1.

Теорема 6.1 про коректність змішаної варіаційної задачі теорії пружності.

Існує один і лише один розв'язок $p=\{u,\sigma\}$ варіаційної задачі (3.1), який характеризується включеннями

$$\begin{aligned} &\sigma \in L^\infty(0,T;\Xi), \\ &u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \\ &u' \in L^2(0,T;V'), \end{aligned} \tag{6.1}$$

рівнянням балансу енергії

$$\frac{1}{2}\left\{\|\sigma(t)\|_{\Xi}^{2}+\|u(t)\|_{H}^{2}\right\}+\int_{0}^{t}\|u(\xi)\|_{V}^{2}d\xi=\frac{1}{2}\left\{\|\sigma(0)\|_{\Xi}^{2}+\|u(0)\|_{H}^{2}\right\}+ \int_{0}^{t}< l(\xi),u(\xi)>d\xi \quad t\in[0,T], \tag{6.2}$$

та апріорною оцінкою

$$\|\sigma(t)\|_{\Xi}^{2}+\|u(t)\|_{H}^{2}+\int_{0}^{t}\|u(\xi)\|_{V}^{2}d\xi\le\|\sigma(0)\|_{\Xi}^{2}+\|u(0)\|_{H}^{2}+K\int_{0}^{t}\|l(\xi)\|_{*}^{2}d\xi \quad t\in[0,T], \tag{6.3}$$

де K=const>0 не залежить від величин, що нас цікавлять.

Можна зробити такі висновки й узагальнення:

(i) Основним результатом цієї праці є відповідь на питання стосовно коректності постановки змішаної варіаційної задачі теорії пружності (3.1), сформульованої в термінах вектора швидкості зміщень $u(t)$ та тензора пружних напружень $\sigma(t)$. Конструктивний шлях, заснований на напівдискретизації задачі (3.1) за методом Гальоркіна відносно просторових змінних, дав змогу виявити існування розв'язку задачі (3.1) як границі послідовності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна. На додаток до цього належний аналіз енергетичного рівняння дав змогу побудувати апріорні оцінки, які дають відповідь стосовно регулярності шуканого розв'язку та його неперервної залежності відносно даних задачі (3.1).

(ii) З погляду чисельного аналізу одержані тут результати відносно стійкості та збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна є вагомою підставою для побудови ефективних проекційно-сіткових схем розв'язування задачі (3.1) з використанням змішаних скінченно-елементних апроксимацій за просторовими змінними та однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі.

На наступному етапі дослідження плануємо розглянути питання побудови змішаних скінченно-елементних апроксимацій для розв'язування цього класу варіаційних задач в'язкопружності.

---

1. *Stenberg R.* A family of mixed finite elements for the elasticity problem // Numer.Math. 1988. Vol. 53. P. 513-538.
2. *Brezzi F., Fortin M., Marini L.D.* Mixed finite element methods with continuous stresses // Math. Mod. & Meth. in Appl. Sci. 1993. Vol. 3. № 2, P. 275-287.
3. *Amara M., Thomas J.M.* Equilibrium finite elements for the linear elastic problem // Numer.Math. 1979. Vol. 33. P. 367-383.
4. *Arnold D.N, Brezzi F., Douglas J.* PEERS: A new finite element for plane elasticity // Jap. J. Appl. Math. 1984. Vol. 1. P. 347-367.
5. *Brezzi F., Douglas J., Marini L.D.* Recent results on mixed finite element methods for second order elliptic problem // Numer.Math. 1985. Vol. 47. P. 217-235.
6. *Farhloul M., Fortin M.* A mixed nonconforming finite element for the elasticity and Stokes problems // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1999. Vol. 9. № 8. P. 1179-1199.

7. *Bermudez A., Rodrigues R.* Finite element computation of vibration modes of a fluid-solid system // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1994. Vol. 119. P. 355-370.
8. Finite elements. Theory and application / Ed. D.L. Dwoyer, M.Y. Hussaini, R.G. Voigt. Springer-Verlag. New York, 1988.
9. *Hamdi M.A., Ousset Y., Verchery G.* A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1978. Vol. 13. P. 139-150.
10. *Olson L.G., Bathe K.J.* A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems // Nucl. Eng. Des. 1983. Vol. 76. P. 137-151.
11. *Wang X., Bathe K.J.*. Displacement/pressure based finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1997. Vol. 40, P. 2001-2017.
12. *Wang X., Bathe K.J.* On mixed elements for acoustic fluid-structure interactions // Mathematical Models & Methods in Applied Sciences. 1997. Vol. 7. № 3. P. 329-343.
13. *Шинкаренко Г.А*. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: УМК ВО, 1991.
14. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
15. *Brezzi F., Marini L.D.* A survey on mixed finite element approximations // I.E.E.E. Transactions on Magnetics. 1994. Vol. 30. P. 3547-3551.
16. *Brezzi F., Manzini M., Marini D., Pietra P., Russo A.* Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems // Numer. Methods Partial Differential Eq. 2000. Vol. 16. P 365-378.
17. *Chapelle D., Bathe K.J.* The inf-sup test // Comput. & Struct. 1993. Vol. 47. P. 537-545.

A STUDY OF SOLVABILITY OF EVOLUTION MIXED VARIATIONAL FORMULATIONS FOR THE LINEAR VISCOELASTICITY

Y. Kondratyuk, G. Shynkarenko

Ivan Franko National University in Lviv
Universytetska str, 1, 79000 Lviv, Ukraine, e-mail: kis@franko.lviv.ua

A new evolution mixed variational formulation for the linear theory of viscoelasticity is considered. In the formulation the approximated variables are the velocity and the symmetric elastic stress tensor.

This approach has a number of advantages compared with traditional displacement methods.

The interest in using the stress field and the velocity as an approximated variables is questionable in as simple a case, but its use is clear in more general and more complicated problems involving nonlinearities, fluid-structure interaction, plasticity and others problems.

The main objective of this paper is to present a study of solvability of mixed variational formulations for the dynamic response of linear viscoelastic structure to specific exitations.

From the point of view of numerical analysis the results obtained here concerning the stability and convergency of semi-descrete Galerkin approximations are sufficient basis for

building effective projection-mesh schemes for solving the above-mentioned variational problem by using mixed finite element approximations and one-step time integration schemes.

However, the key to whether a mixed formulation is actually valuable lies, of course, in convergence properties of the formulation. These properties are governed by the stability considerations as expressed in the ellipticity requirement and the inf-sup condition of Brezzi and Babuska.

An analytical proof of whether the inf-sup condition is satisfied by a specific element or discretization can be difficult. In engineering practice a numerical inf-sup test that with relatively little effort indicates whether the inf-sup condition is passed is known to be valuable.

The work to be done on the next stage of this research is to consider the questions mentioned above.

Key words: mixed variational formulation; inf-sup condition; viscoelasticity

Стаття надійшла до редколегії 20.04.2000
Прийнята до друку 21.09.2000