ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія прикладна математика та інформатика. 2001. Вип. 2. С. 110-115

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Applied Mathematics and Computer Science. 2001. No 2. P. 110-115

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ АДАПТИВНИМ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

І. Дияк, Р. Тучапський

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

Побудова ефективних чисельних алгоритмів для розв’язування граничних задач математичної фізики, які дають змогу отримувати розв’язки заданої точності та їх програмна реалізація – актуальна проблема сучасних наукових досліджень. Розглянемо h-адаптивний алгоритм непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) для задач осесиметричної теорії пружності. Підхід, розроблений у [3], узагальнимо для осесиметричних задач з використанням методики h-адаптації з апостеріорним оцінюванням похибок. Використаємо схему h-адаптації, аналогічну до тієї, що була запропонована в [5] для прямого методу граничних елементів (ПМГЕ).

1. Граничні інтегральні співвідношення для переміщень u та зусиль t виражають їх через фіктивні інтенсивності поверхневих сил φ, у радіальному та аксіальному напрямках, r і z, на поверхні осесиметричного ізотропного одно–рідного пружного тіла, що перебуває під дією осесиметричного навантаження [2]:

$$u_i(P)=\int_L G_{ij}(P,Q)\varphi_j(Q)dL(Q), \tag{1}$$

$$t_i(P)=\int_L F_{ij}(P,Q)\varphi_j(Q)dL(Q)\pm\mu_{ij}\varphi_j(P), \tag{2}$$

де P і Q – точки спостереження та прикладання зусиль відповідно на меридіональному контурі тіла L. Якщо точка P – не кутова, (тобто в цій точці існує єдина дотична), то $\mu_{rr}=\mu_{zz}=\frac{1}{2}$, $\mu_{rz}=\mu_{zr}=0$. Вираз $\mu_{ij}\varphi_j(P)$ у (2) беремо зі знаком “$+$” у випадку внутрішньої задачі та зі знаком “–” у випадку зовнішньої. Криволінійний інтеграл у (2) – це інтеграл у сенсі головного значення за Коші.

2. Для дискретизації (1) і (2), меридіональний контур L розбиваємо на N кривих, які називають граничними елементами (ГЕ). Занумеровуємо ці криві за напрямом обходу L. Вважаємо, що нерегулярні точки L (кутові точки, точки стрибкоподібної зміни навантаження, точки зміни типу граничних умов) не можуть перебувати всередині ГЕ. На p-му ГЕ обираємо $s>1$ вузлових точок $\zeta^{p,k}$ ($k=1,\ldots,s$), які занумеровуємо за напрямом обходу L, причому кінцеві вузли ГЕ обираємо так, щоб $\zeta^{p,s}=\zeta^{p+1,1}$. Тут і далі покладаємо, що $\zeta^{N+1,1}=\zeta^{1,1}$.

Граничні поля на p-му ГЕ подаємо за допомогою вузлових значень

$$u_i(t)=N^k(t)u_i^{p,k}, \quad t_i(t)=N^k(t)t_i^{p,k}, \quad \varphi_i(t)=N^k(t)\varphi_i^{p,k},$$

де $u_i^{p,k} = u_i\left(\zeta^{p,k}\right)$, $t_i^{p,k} = t_i\left(\zeta^{p,k}\right)$, $\varphi_i^{p,k} = \varphi_i\left(\zeta^{p,k}\right)$, $N^k(t)$ ($k = 1,\dots,s$) – многочлени Лагранжа $(s-1)$-ого степеня, визначені на відрізку $[-1,1]$.

Якщо остання точка $\zeta^{p,s}$ ГЕ регулярна, то

$$\varphi_j^{p,s} = \varphi_j^{p+1,1}. \tag{3}$$

Тут і далі вважаємо, що $\varphi_j^{N+1,1} = \varphi_j^{1,1}$.

Застосовуючи до (1) та (2) процедуру Бубнова-Гальоркіна [3], отримуємо:

$$\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} N^l(\eta)\int_{-1}^{1} G_{ij}\left(\zeta^p(\eta),\zeta^q(t)\right)N^k(t)J^q(t)dtJ^p(\eta)d\eta - u_i^{p,k}\int_{-1}^{1} N^l(\eta)N^k(\eta)J^p(\eta)d\eta = 0, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\pm\varphi_j^{p,k}\int_{-1}^{1} N^l(\eta)\mu_{ij}N^k(\eta)J^p(\eta)d\eta + \\ +\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} N^l(\eta)\int_{-1}^{1} F_{ij}\left(\zeta^p(\eta),\zeta^q(t)\right)N^k(t)J^q(t)dtJ^p(\eta)d\eta - t_i^{p,k}\int_{-1}^{1} N^l(\eta)N^k(\eta)J^p(\eta)d\eta = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$p = 1,\dots,N$, $l = 1,\dots,s$.

У (4) та (5) функції $\zeta^p(t)$ представляють геометрію p-го ГЕ:

$$\zeta^p(t) = N^k(t)\zeta^{p,k},$$

а $J^p(t)dt$ – це елемент кривої $\zeta^p(t)$.

Інтеграли $\int_{-1}^{1} F_{ij}\left(\zeta^p(\eta),\zeta^p(t)\right)N^k(t)J^p(t)dt$, де η – абсциса квадратури Гаусса, існують лише у сенсі головного значення за Коші. У праці [4] описано прямий чисельний метод обчислення інтегралів подібного вигляду, що полягає в перетворенні їх у суму регулярних інтегралів перед застосуванням до них стандартних квадратурних формул. Хоча автор описує застосування підходу лише для інтегралів подібного вигляду, що виникають у ПМГЕ, цей підхід можна легко узагальнити і на цей випадок.

З рівнянь (4) та (5), що записані для вузла $\zeta^{p,l}$, вибираємо рівняння, що відповідають заданим граничним умовам на p-му ГЕ. Для повних наборів заданих граничних значень на всіх ГЕ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{b}$$

розмірності $2sN$.

Проведемо редукцію невідомих. Виконуємо таку процедуру для всіх регулярних вузлів з'єднання двох ГЕ. Додаємо почленно однотипні рівняння, що відповідають вузлу з цієї множини. Замінюємо ці рівняння на новоутворене рівняння. Аналогічні операції виконуємо і для стовпчиків.

Враховуючи (3), отримуємо остаточну СЛАР

$$\mathbf{A}_{\textbf{ост}}\varphi_{\textbf{ост}} = \mathbf{b}_{\textbf{ост}} \tag{6}$$

розмірності $2sN - 2\times\left(N - \text{кількість нерегулярних точок}\right)$.

Коли невідомі $\varphi_j^{q,k}$ знайдено, можна за допомогою дискретного подання відповідних інтегральних співвідношень обчислити значення переміщень, деформацій, напружень у будь-якій внутрішній точці меридіонального перерізу.

3. Для одержання значень φ_i, $i = r, z$ з бажаною точністю застосовуємо процес h-адаптації, що забезпечує належне розбиття меридіонального контуру на ГЕ залежно від похибок чисельних розв'язків.

Щоб оцінити похибки вузлових значень $\varphi_i^{p,k}$, отриманих із (6), будуємо криві порядку $s-1$, що проходять через вибрані вузли та ГЕ, й одержуємо інші вузлові значення $\hat{\varphi}_i^{p,k}$. Як вибирати вузли в різних ситуаціях -зображено на рис. 1, на якому використовуються позначення: | – кінцеві вузли ГЕ, ″ – вузли, з яких здійснюється інтерполяція чи екстраполяція, – вузли, на які інтерполюємо чи екстраполюємо. На рис. 1а вузол $\zeta^{p,1}$ – нерегулярний, а на рис. 1в, 1г вузол $\zeta^{p+1,s}$ – нерегулярний.

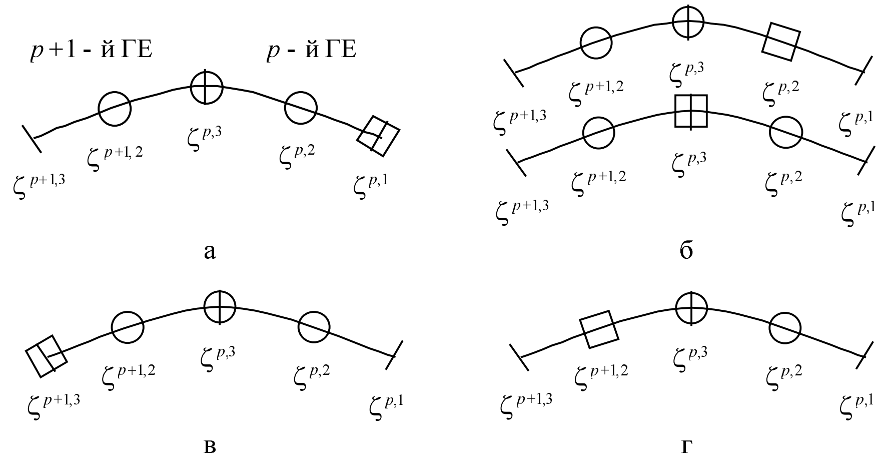

Рис. 1. Інтерполяція та екстраполяція $\hat{\varphi}^{p,}$ на квадратичних ГЕ

Оцінюємо похибки у вузлах таким чином:

$$e^{p,k}_{\varphi_i} = \frac{1}{2}\left|\hat{\varphi}^{p,k}_i - \varphi^{p,k}_i\right| .$$

Обчислюємо локальні норми та похибки на ГЕ і довжини ГЕ за допомогою формул:

$$\|\varphi_i\|_p^2 = \int_{-1}^{1}\left[\varphi_i^{p,k}N^k(t)\right]^2 J^p(t)dt\,,\ \|e_{\varphi_i}\|_p^2 = \int_{-1}^{1}\left[e^{p,k}_{\varphi_i}N^k(t)\right]^2 J^p(t)dt\,,\ lenL_p = \int_{-1}^{1}J^p(t)dt\,,$$

де через L_p позначено p-й ГЕ.

Глобальні похибки та норми обчислюємо сумуванням локальних похибок і норм:

$$\|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_i\|_p^2\,,\ \|e_{\varphi_i}\|^2 = \|e_{\varphi_i}\|_p^2\,.$$

Локальні та глобальні відносні похибки визначаємо за допомогою формул:

$$\eta^p_{\varphi_i} = \sqrt{\frac{N\|e_{\varphi_i}\|_p^2}{\|\varphi_i\|^2 + \|e_{\varphi_i}\|^2}}\,, \qquad \eta_{\varphi_i} = \sqrt{\frac{\|e_{\varphi_i}\|^2}{\|\varphi_i\|^2 + \|e_{\varphi_i}\|^2}}\,,$$

де N – кількість ГЕ.

Якщо сума $\|\varphi_i\|^2 + \|e_{\varphi_i}\|^2$ близька до нуля, то покладаємо $\eta_{\varphi_i}^p = 0$ та $\eta_{\varphi_i} = 0$.

Наведемо алгоритм адаптивного НМГЕ.

Крок 1. Будуємо початкову сітку ГЕ. Нерегулярні точки розбивають меридіональний контур на криві. Кожну таку криву ділимо щонайменше на три ГЕ. Заносимо в множину Ξ ГЕ, суміжні з нерегулярними точками. Якщо контур не містить нерегулярних точок, то ділимо його щонайменше на два ГЕ.

Крок 2. Розв'язуємо задачу НМГЕ.

Крок 3. Обчислюємо локальні та глобальні відносні похибки $\eta_{\varphi_i}^p$ та η_{φ_i}. Знаходимо максимальну локальну відносну похибку $\eta_{\max} = \max\left(\eta_{\varphi_i}^p, i = r, z, p = 1,\dots, N, L_p \notin \Xi\right)$.

Крок 4. Зупиняємо процес, якщо виконується одна з двох умов:

$$\eta_{\max} \le \eta_L,\ \eta_{\varphi_i} \le \eta_G,$$

де η_L і η_G – задані максимальні допустимі локальна та глобальна похибки відповідно.

Крок 5. Ділимо на два рівновеликі ГЕ, які задовільняють одну з умов:

$$\eta_{\varphi_i}^p \ge \gamma\eta_{\max},\ L_p \notin \Xi;$$

$$\text{або } \eta_{\varphi_i}^p \ge \gamma\eta_{\max},\ L_p \in \Xi, lenL_p \ge \min\left(lenL_q, q = 1,\dots, N, L_q \notin \Xi\right); \tag{7}$$

$\gamma \in (0,1)$ – заданий параметр.

Крок 6. Заносимо в множину Ξ ГЕ, що утворились в результаті поділу за умовою (7). Переходимо на крок 2.

Цей алгоритм використовує апостеріорну оцінку похибок. Нескінчена величина фіктивних інтенсивностей поверхневих сил у кутових вузлах приводить до необмеженого зростання локальних похибок на суміжних з ними ГЕ. Множина Ξ містить ГЕ, що лежать у заданих малих околах нерегулярних вузлів. Локальні похибки на цих ГЕ не враховуємо, визначаючи максимальну похибку.

4. Апробація розробленого підходу була проведена на тестовому прикладі, результати дослідження якого наведені далі. Розглядалася задача Ляме [1] визначення напружено-деформованого стану товстостінної нескінченної труби, що знаходиться під дією внутрішнього та зовнішнього рівномірних тисків (рис. 2).

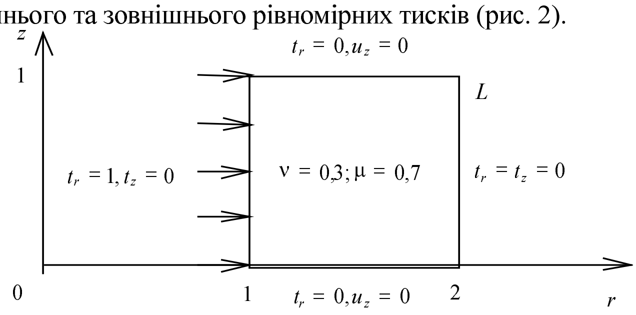

Рис. 2. Граничні умови задачі Ляме

Результати чисельних експериментів, наведені далі, демонструють працездатність розробленої схеми h-адаптації.

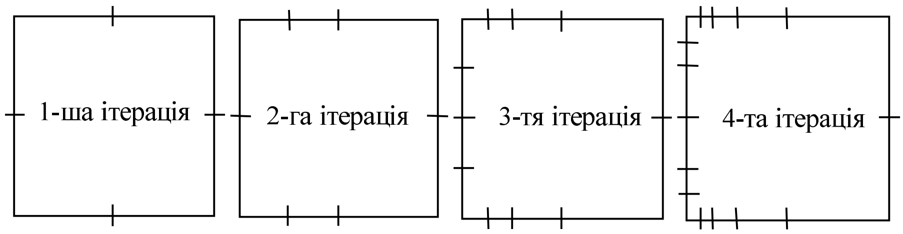

Рис. 3. Дискретизація меридіонального контуру L у процесі роботи алгоритму h-адаптації

Використовувались лінійні ГЕ. Обрали $\gamma = 0{,}5$, $\eta_L = \eta_G = 0{,}01$. ГЕ з множини Ξ та їх номери не наведено. Довжина цих ГЕ становить $0{,}001$ і відобразити їх у масштабі рис. 3 неможливо.

Збіжність процесу h-адаптації

№	r	u_r	$\tilde{u}_r$	$u_r - \tilde{u}_r$	σ_{rr}	$\tilde{\sigma}_{rr}$	$\sigma_{rr} - \tilde{\sigma}_{rr}$
1	1,10	0,97	1,39	-0,42	-0,77	-0,97	0,21
	1,50	0,78	1,08	-0,30	-0,26	-0,64	0,38
	1,90	0,68	0,89	-0,21	-0,04	-0,36	0,32
2	1,10	0,97	1,69	-0,72	-0,77	-1,76	1,00
	1,50	0,78	1,25	-0,47	-0,26	-1,07	0,81
	1,90	0,68	0,99	-0,31	-0,04	-0,56	0,52
3	1,10	0,97	1,90	-0,93	-0,77	-3,53	2,76
	1,50	0,78	1,30	-0,53	-0,26	-1,32	1,06
	1,90	0,68	1,02	-0,34	-0,04	-0,63	0,59
4	1,10	0,97	0,97	0,00	-0,77	-0,77	0,00
	1,50	0,78	0,78	0,00	-0,26	-0,26	0,00
	1,90	0,68	0,68	0,00	-0,04	-0,07	0,03

В табл. через u_r та σ_{rr} позначено значення аналітичних розв'язків для переміщень і напружень, а через $\tilde{u}_r$ та $\tilde{\sigma}_{rr}$ – значення переміщень і напружень, отримані НМГЕ на кожній ітерації процесу h-адаптації, у вибраних точках на відрізку $\{1{,}1 \le r \le 1{,}9; z = 0{,}5\}$.

Відомі труднощі у МГЕ у випадку, якщо обчислювати значення переміщень і напружень у внутрішніх точках області, що лежать у околі границі. На рис. 4 наведені значення напружень σ_{zz} на відрізку $\{1{,}01 \le r \le 1{,}99; z = 0{,}01\}$.

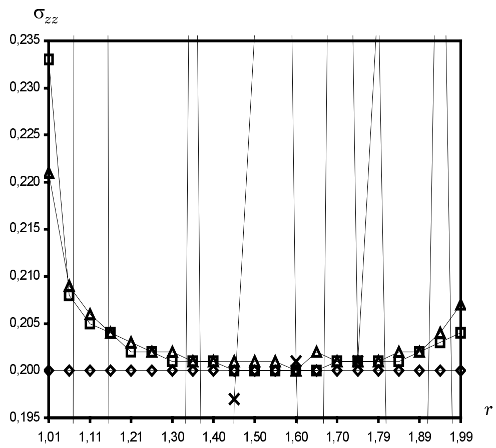

Рис. 4. Напруження σ_{zz}

—◊— – аналітичний розв'язок [1]. —□— – результат, отриманий, коли кожна сторона кривої L розбивалась на 100 рівновеликих лінійних ГЕ. —Δ— – результат, одержаний із застосовуванням процесу h-адаптації, меридіональний контур L розбивався на 357 ГЕ. —×— – розв'язок, отриманий, коли кожна сторона кривої L розбивалась на чотири рівновеликі лінійні ГЕ. Використання алгоритму h-адаптації дало змогу одержати найточніші результати.

---

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
3. *Дияк І. І., Кухарчук Ю. А., Сулим Г. Т.* Дослідження пружної рівноваги плоских тіл методом граничних елементів. // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 47. С. 87-95.
4. *Guiggiani M.* The evaluation of Cauchy principal value integrals in the boundary element method – a review // Mathl. Comput. Modelling, 1991. Vol. 15. P. 175-184.
5. *Zhao Z.* A simple error indicator for adaptive boundary element method // Comput. & Struct. 1998. Vol. 68. P. 433-443.

A NUMERICAL INVESTIGATION OF PROBLEM OF AXISYMMETRIC THEORY OF ELASTICITY BY AN ADAPTIVE INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD

I. Dyyak, R. Tuchapsky

Ivan Franko National University in Lviv
Universytetska str, 1, 79000 Lviv, Ukraine, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

The h-adaptive algorithm for the solution of problems of the axisymmetric theory of elasticity on the basis of an indirect boundary element method is proposed. The Bubnov-Galerkin method is applied to the solution of the boundary integral equations. The results of the test problem investigation are given, which demonstrates the efficiency of the developed approaches.

Key words: h-adaptive algorithm, axisymmetric theory of elasticity; indirect boundary element method; Bubnov-Galerkin approximation

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2000
Прийнята до друку 21.09.2000