

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 517.958:519.6

### ВПЛИВ РІДИНИ НА ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТОРЦЕВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

І. Бернакевич

Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна, e-mail: kis@franko.lviv.ua

У [2] досліджувалась задача поширення хвиль у рідині, яка повністю заповнює циліндричну оболонку. Тут розглядається осесиметрична задача поширення хвиль у циліндричній оболонці, заповненій рідиною, нестационарні процеси в якій спричинені імпульсним навантаженням на торцеві кінці. Поведінка оболонки описується лінійними співвідношеннями із залученням гіпотез Тимошенка. Для опису руху рідини використовується акустичне наближення системи рівнянь гідродинаміки.

Для розв'язування зв'язаної задачі застосовується проекційно-сіткова схема [1, 5], яка передбачає кусково-квадратичні апроксимації методу скінчених елементів за просторовими змінними та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Здійснено порівняльний аналіз чисельних результатів, отриманих для незаповненої оболонки [3] та оболонки, заповненої рідиною.

**1. Варіаційна постановка задачі.** Нехай

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \{v \in H^1((0, L)) \mid v(0) = 0\}, \quad Y = \{y \in H^1((0, L)) \mid y(0) = y(L) = 0\}, \quad S = V \times Y \times V, \\ G = [L^2((0, L))]^3, \quad \Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega)\}, \quad H = L^2(\Omega), \quad Q = S \times \Phi, \quad X = G \times H \end{array} \right.$$

функціональні простори,  $\Phi'$  та  $S'$  – відповідні спряжені простори. Символом  $t$  будемо позначати довільний момент часу із проміжку  $[0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ . Використовуючи принцип віртуальних робіт [4], запишемо варіаційну постановку [1, 2] задачі взаємодії

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 \in \Phi, \psi_1 \in H, s_0 \in S, s_1 \in G \\ l \in L^2(0, T; \Phi'), \lambda \in L^2(0, T; S'); \\ \text{знайти пару } p = (\psi, s) \in L^2(0, T; \Phi \times S) \text{ таку, що} \\ m(\psi''(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) - b(s'(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi \\ \mu(s''(t), g) + \eta(s(t), g) + b(g, \psi'(t)) = \langle \lambda(t), g \rangle \quad \forall g = (v, y, v) \in S. \\ m(\psi'(0) - \psi_1, \varphi) = 0, \quad \mu(s'(0) - s_1, q) = 0 \\ a(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0, \quad \eta(s(0) - s_0, q) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $s = (u, w, \gamma)$  – вектор узагальнених переміщень,  $\psi$  – потенціал швидкостей рідини. Детальний опис постановки задачі акустичної взаємодії наведено в [2]. Звідти ж запозичено вживані позначення.

Використані лінійні та білінійні форми визначаються формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0 c^2} \psi \varphi r dr dz, \quad \mu(s, g) = \int_0^t \left( \rho h u v + \rho h w y + \frac{\rho h^3}{12} \gamma \xi \right) R dz, \\ a(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi, \quad \forall s, g \in S \\ \eta(s, g) = \int_0^t \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_j(s) \varepsilon_j(g) + M_j(s) \kappa_j(g)] + N_{13}(s) \varepsilon_{13}(g) \right\} R dz \\ b(s, \varphi) = \int_0^t w \varphi R dz, \quad \langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega_F} f_0 \varphi r dr dz, \quad \langle \lambda, g \rangle = \int_0^t (f_1 v + \tilde{f}_3 y + f_4 \xi) R dz + R \tilde{N}_1. \end{array} \right.$$

Зазначимо, що білінійна форма  $b(s, \varphi)$  описує механізм обміну енергією між взаємодіючими полями.

У [1] конструктивним методом з використанням напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними та шляхом аналізу рівняння балансу енергії взаємодіючих полів доведено коректність варіаційної задачі взаємодії (1), що може бути запорукою успішної побудови проєкційно-сіткової схеми її розв'язання. Основи цього підходу із застосуванням методу скінчених елементів за просторовими змінними та однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі закладено в [1-3, 5].

**2. Проєкційно-сіткова схема.** Проєкційно-сіткова схема розв'язування варіаційної задачі (1) передбачає напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними із використанням скінченноелементних апроксимацій та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі [1, 2, 5]. Використання матричних позначень допускає таке алгебраїчне подання рекурентної схеми:

Задано  $\Delta t, \beta, \theta = \text{const} > 0$ ,  $\Psi^j, \Phi^j \in R^K$ ,  $S^j, G^j \in R^N$ .

Знайти  $\Psi^{j+1}, \Phi^{j+1} \in R^K$ ,  $S^{j+1}, G^{j+1} \in R^N$  такі, що

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_F & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B} \\ \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B}^T & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_S \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^j \\ \mathbf{S}^j \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{L}_j \\ \Lambda_j \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_S \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi^j \\ \mathbf{G}^j \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Psi^{j+1} \\ \mathbf{S}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^j \\ \mathbf{S}^j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi^{j+1} \\ \mathbf{G}^{j+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^j \\ \mathbf{G}^j \end{bmatrix} \quad j = 0, 1, \dots, N_T \end{array} \right. \quad (2)$$

Видно, що система з двох перших з рівнянь (2) має єдиний розв'язок  $(\Phi^{j+1/2}, G^{j+1/2})$ , що дає змогу з чотирьох наступних рівнянь обчислити  $(\Psi^{j+1}, S^{j+1}, \Phi^{j+1}, G^{j+1})$ , необхідні для переходу до наступного кроку інтегрування.

Проекційно-сіткова схема (2) передбачає, що напівдискретизація Гальоркіна використовує базисні функції  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K$  та  $g_1, g_2, \dots, g_N$  скінченновимірних просторів  $\{\Phi_h\} \subset \Phi$  та  $\{S_h\} \subset S$ , таких що

$$\begin{cases} \dim \Phi_h = K \rightarrow \infty, & \bigcup_{h>0} \Phi_h \text{ щільно вкладене в } \Phi, \\ \dim S_h = N \rightarrow \infty, & \bigcup_{h>0} S_h \text{ щільно вкладене в } S, \end{cases}$$

а інтегрування в часі виконується з кроком  $\Delta t$ ,  $\Delta t N = N_T$ . Тоді наближений розв'язок варіаційної задачі (1) визначається формулою

$$(\Psi_h(t_m), S_h(t_m)) = \left( \sum_{j=1}^K \Psi_j^m(t_m) \varphi_j, \sum_{k=1}^N S_k^m(t_m) g_k \right).$$

Детальний аналіз проекційно-сіткової схеми (2) стосовно умов її стійкості та збіжності з побудовою відповідних апріорних оцінок здійснено в [1, 5].

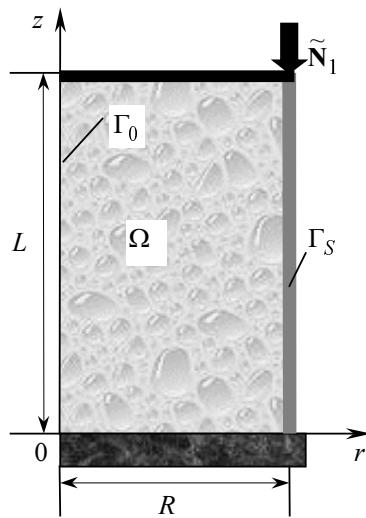


Рис.1. Меридіанний перетин конструкції

**3. Чисельний приклад.** Розглянемо циліндричну оболонку постійної товщини  $h$ , радіуса  $R$ , висоти  $L$ . При цьому верхній край оболонки шарнірно опертий, а нижній жорстко закріплений у масивній плиті (див. рис.1). Граничні умови на краях оболонки запишуться так:

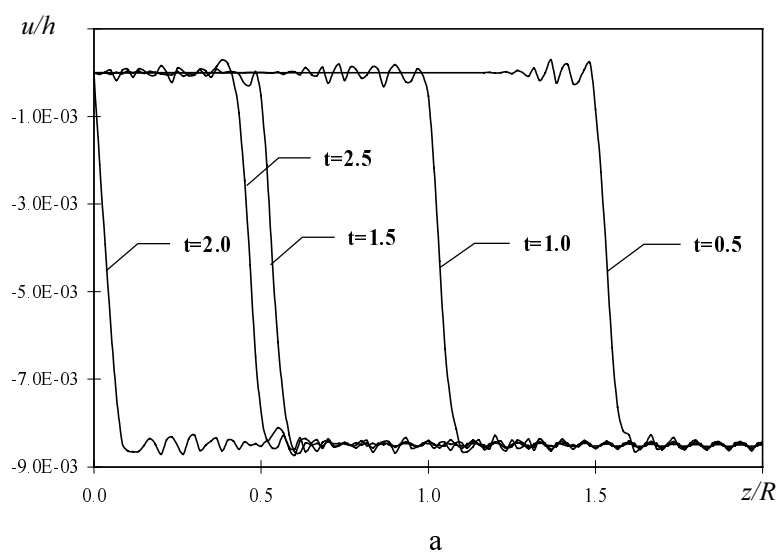
$$u = w = \gamma = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$w = 0, N_1 = \tilde{N}_1, M_1 = 0 \quad \text{при } z = L.$$

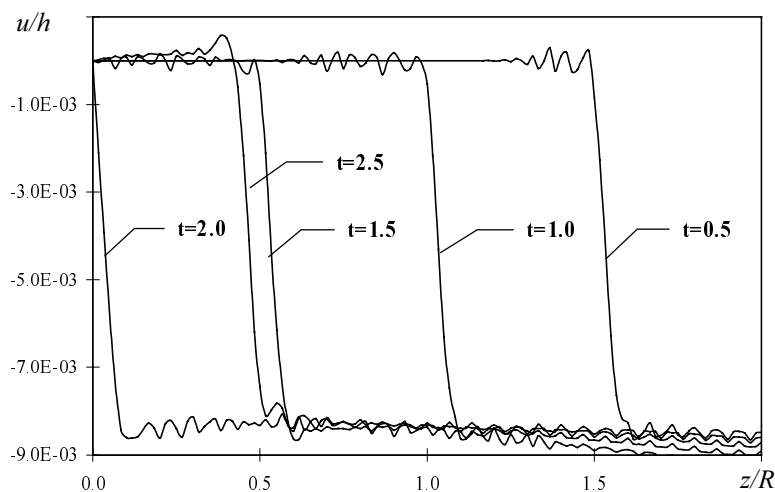
Обчислення виконано при таких значеннях вхідних даних: матеріал оболонки – алюміній з механічними характеристиками  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 2.7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ , геометричні розміри  $R = 1.5$  м,  $L = 3$  м,  $h = 0.03$  м; заповнення оболонки – вода ( $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1500$  м/с<sup>2</sup>). Нестационарні процеси в системі досліджувались для випадку, коли прикладене поздовжнє зусилля задавалось у вигляді імпульсу

$$\tilde{N}_1 = \begin{cases} \frac{t}{T_1} - 1, & 0 < t \leq T_1, \\ 0, & t > T_1 \end{cases},$$

де  $T_1 = 0.1$  – час дії навантаження. Тут і далі час  $t$  зведено до безрозмірної величини за формулою  $t^* = tR/c_1$ , де  $c_1$  – швидкість поширення поздовжньої хвилі в матеріалі оболонки.



а



б

Рис. 2. Тангенціальні зміщення вздовж меридіана: а – оболонки, заповненої рідиною; б – незаповненої оболонки

Дослідження виявило, що наявність рідини в оболонці при заданому типі навантаження майже не впливає на її тангенціальні зміщення. Це яскраво ілюструє рис.2, на якому зображено графіки розподілу тангенціальних зміщень оболонки вздовж меридіана для оболонки, заповненої рідиною, та незаповненої оболонки, відповідно, у фіксовані моменти часу. При цьому в незаповненій оболонці спостерігається незначний залишковий ефект тангенціального зміщення, який дедалі більше виявляється з плином часу. Наявність же рідини гасить цей процес.

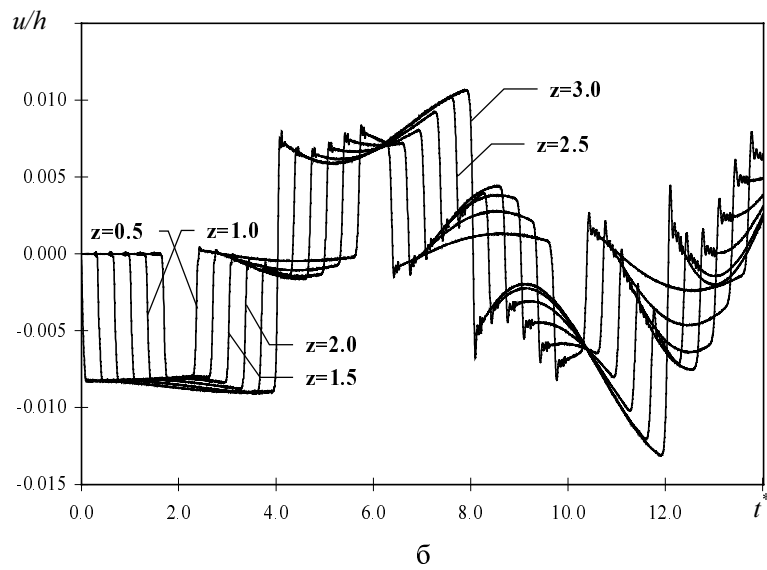
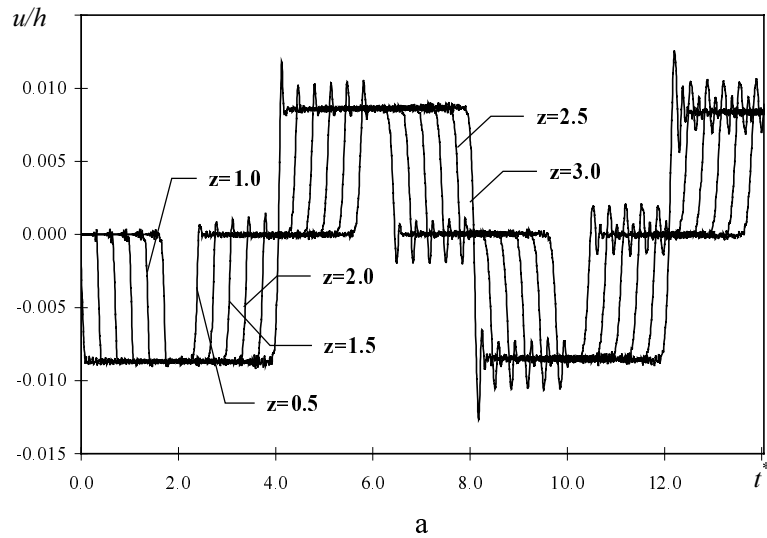
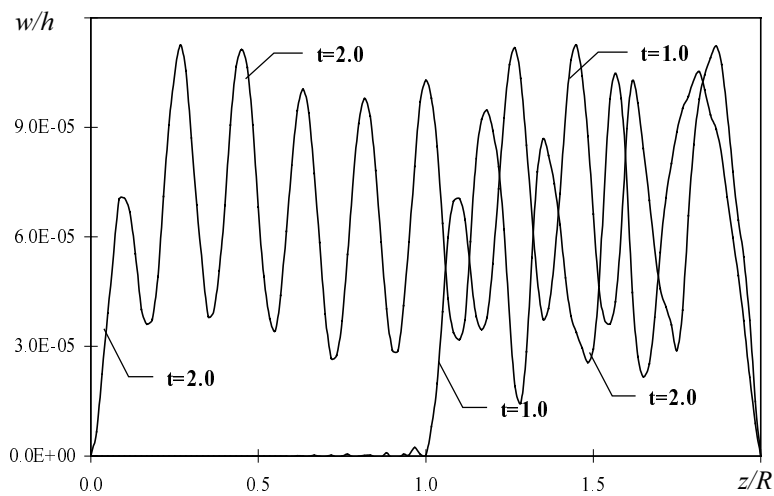
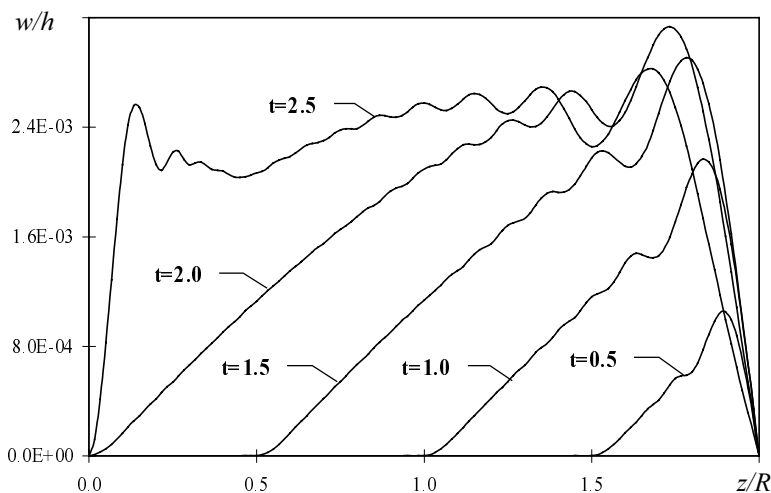


Рис. 3. Зміна в часі тангенціальних зміщень: а – оболонки, заповненої рідиною; б – незаповненої оболонки, у фіксованих перетинах її меридіана

Еволюцію розвитку в часі тангенціальних зміщень оболонки ілюструє рис.3, на якому зображено графіки зміни в часі тангенціальних зміщень для оболонки з рідиною та незаповненої оболонки [3], відповідно, у фіксованих перетинах її меридіана ( $z = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$  м). Помітно, що тангенціальні зміщення оболонки є близькими до періодичних функцій з періодом, який дорівнює часу проходження хвилею двох довжин оболонки.



а



б

Рис. 4. Радіальні зміщення вздовж меридіана: а – оболонки, заповненої рідиною, б – незаповненої оболонки

Що стосується прогинів оболонки, то наявність рідини суттєво впливає на їх форму та амплітуду. На рис.4 зображено графіки розподілу радіальних зміщень оболонки вздовж меридіана для оболонки з рідиною та незаповненої оболонки, відповідно, у фіксовані моменти часу. Прогини оболонки, заповненої рідиною, мають періодичний характер і їх амплітуда менша від відповідних значень для незаповненої оболонки в  $2.6 \cdot 10^2$  разів.

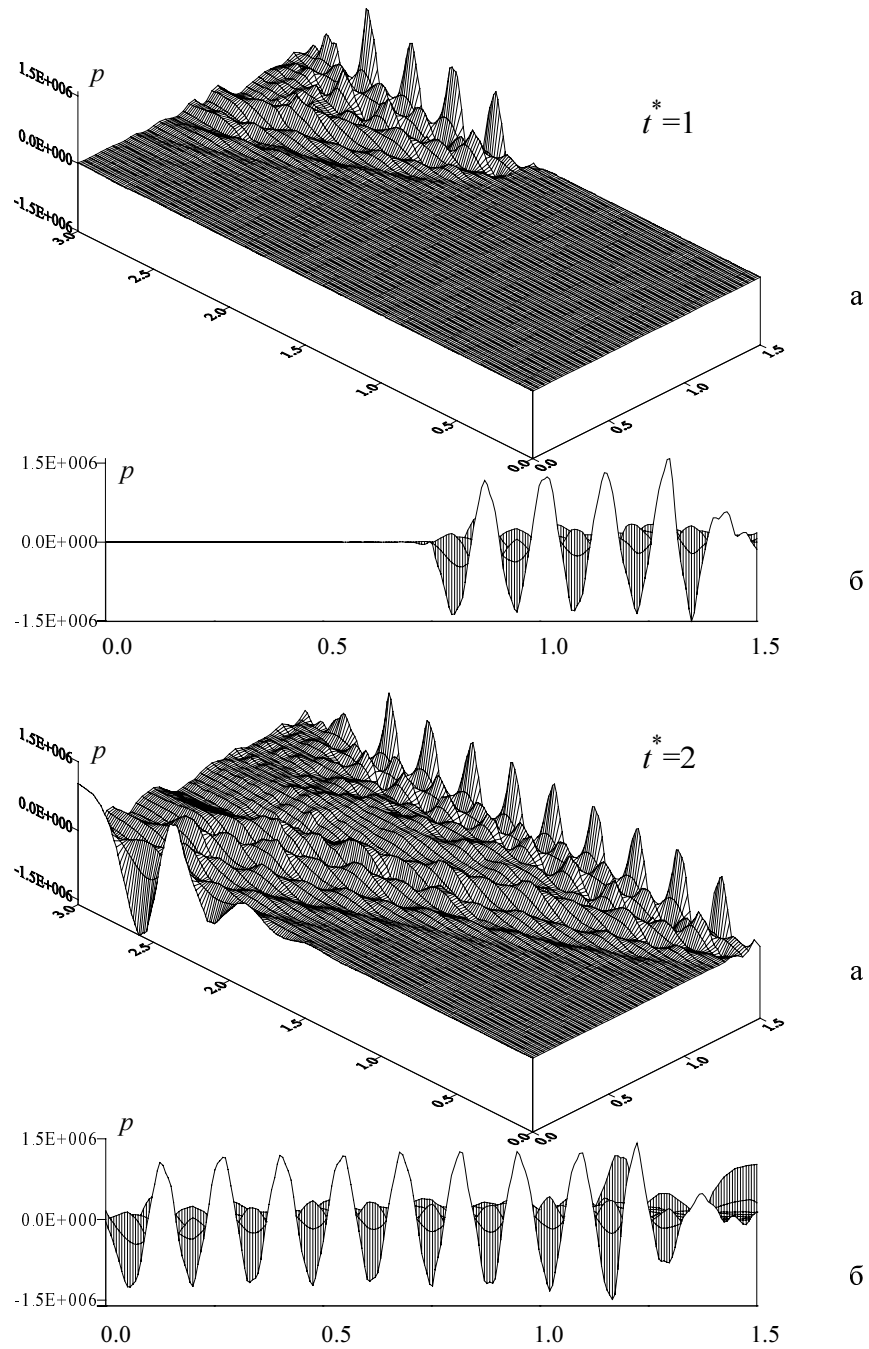
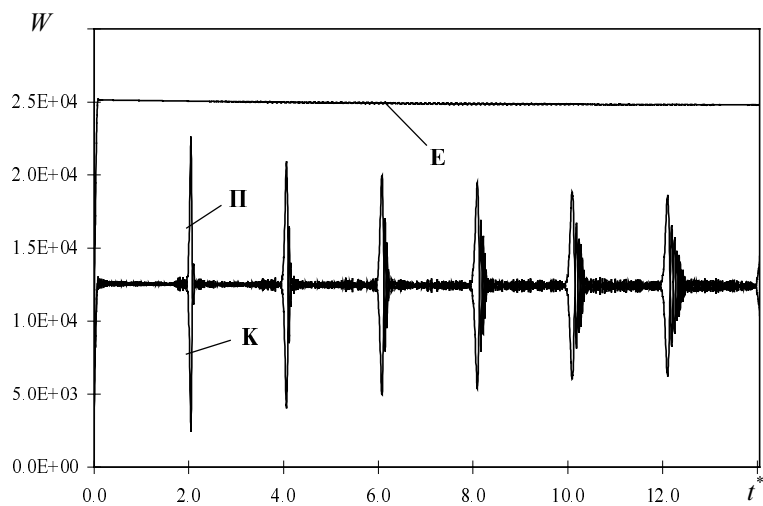
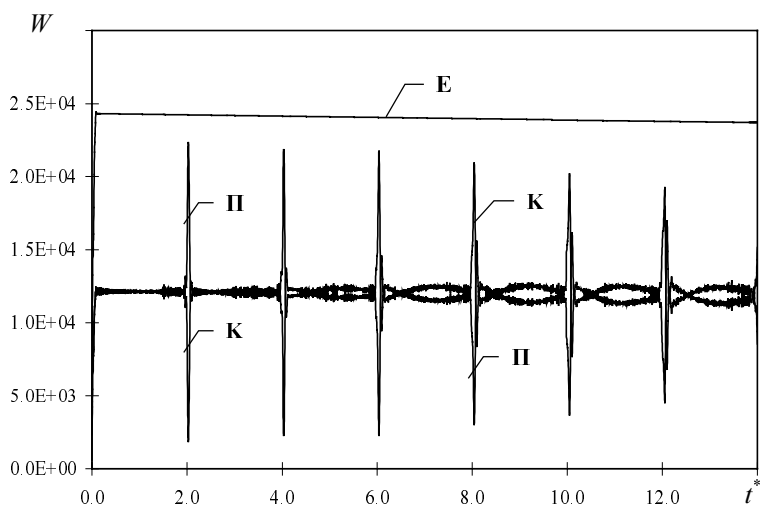


Рис. 5. Розподіл поля тиску в моменти часу  $t^*=1$  та  $t^*=2$ :  
 а – в меридіанному перетині рідини, б – вздовж границі контакту

На рис.5 зображено графіки розподілу тиску в рідині в моменти часу  $t^*=1.0$ ,  $t^*=2.0$ . Фронт хвилі тиску поширюється в двох напрямках: уздовж меридіана оболонки зі швидкістю поздовжньої хвилі в матеріалі оболонки і в напрямку осі симетрії зі швидкістю звуку в рідині. Характерним є утворення області від'ємного тиску при досягненні хвилею осі симетрії. На межі контакту рідини з оболонкою спостерігаються різкі коливання тиску, які не вдається усунути ні згущенням сітки



а



б

Рис. 6. Зміна в часі кінетичної (К), потенціальної (П) та повної (Е) енергій:  
а – оболонки, заповненої рідиною; б – незаповненої оболонки



вздовж меридіана оболонки (розрахунки виконувались при розбитті меридіана оболонки на 60 і 90 скінченних елементів), ні зменшенням кроку інтегрування ( $\Delta t = 0.1875 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta t = 0.3975 \cdot 10^{-6}$ ), ні зміною параметрів схеми інтегрування. ( $\beta = \theta = 0.5001$ ,  $\beta = \theta = 0.5200$ ).

Порівнюючи графіки розподілу тиску з відповідними графіками зміни прогинів оболонки вздовж меридіана (див. рис. 4), дійшли висновку, що наявні піки тиску на межі контакту викликані прогинами оболонки. Отже, таке навантаження спричиняє не лише поздовжні хвилі в матеріалі оболонки, а й поперечні, які зумовлюють радіальні коливання оболонки.

Проведено також аналіз енергетичних характеристик процесу деформування циліндричної оболонки, заповненої рідиною. На рис.6 зображено графіки розподілу кінетичної (К), потенціальної (П) та повної (Е) енергій для незаповненої оболонки й оболонки, заповненої рідиною, з плином часу. Видно, що втрат енергії майже немає. Наявний лише перерозподіл між кінетичною та потенціальною енергіями, який відбувається в моменти досягнення пружною хвилею жорстко закріпленого та шарнірно опертого країв циліндричної оболонки.

Отримані чисельні результати з великим ступенем достовірності моделюють процес поширення гідропружної хвилі в циліндричній оболонці, що дає змогу застосовувати запропонований підхід до розв'язування практичних задач.

Автор висловлює щирю вдячність професорові Г.А.Шинкаренку за допомогу та зацікавленість цим дослідженням.

1. *Бернакевич І.Є.* Чисельне дослідження початково-крайових задач акустичної взаємодії рідини з тонкостінними конструкціями: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Львів: ПТЦ "Агрософт", 1997.
2. *Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А.* Вплив циліндричної оболонки на поширення ударної хвилі в рідкому наповнювачі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф-ка. 1999. Вип. 1. С.13-20.
3. *Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А.* Поширення хвиль в циліндричній оболонці під дією імпульсного торцевого навантаження // Волин. мат. вісн. 1997. Вип. 4. С.14-17.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
5. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991.

**FLUID INFLUENCE ON SPREADING WAVES IN CYLINDRICAL SHELL AT AN  
IMPULSE FACE LOAD****I. Bernakevych***Ivan Franko National University in Lviv**Universytetska str, 1, 79000 Lviv, Ukraine, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

The variational problem of acoustic interaction of a cylindrical shell with fluid is considered. The non-stationary processes are generated by an impulse load on an end face of a shell. For a solution of variational problem is constructed the scheme what contains spatial Galerkin semidiscretization in FEM form and one-step recurrent time integration scheme. The offered approach to solution of the interaction problem has allowed with a large degree of reliability to simulate wave process in an shell stipulated by an impulse load. The comparative analysis of numerical results obtained for an empty shell and shell filled fluid is realized.

*Key words:* variational problem; acoustic interaction; Galerkin semidiscretization; one-step recurrent scheme

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2000

Прийнята до друку 21.09.2000