ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія прикладна математика та інформатика. 2001. Вип. 2. С. 72-76

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Applied Mathematics and Computer Science. 2001. No 2. P. 72-76

УДК 519.6:621.372.8

ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА МОДИФІКОВАНИМ МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Світлана Ярошко

*Львівський економічний бізнес-коледж
при Львівському національному університеті імені Івана Франка,
вул. М. Менцинського, 8, 79000 Львів, Україна*

Дослідження багатьох задач математичної фізики, механіки та інших наук спричиняють виникнення спектральних задач для операторних пучків. Спектральний параметр може входити в пучок нелінійно. Є різні підходи до розв'язання таких задач, наприклад, [4, 9].

Ми розглянемо застосування модифікованого методу послідовних наближень (ММПН) [5] для обчислення власних пар квадратичного операторного пучка вигляду

$$B(\lambda) \equiv \lambda^2 + \lambda B_1 + B_2, \tag{1}$$

де B_1, B_2 – цілком неперервні оператори, що діють у банаховому просторі *E*.

У [10, 2] цей метод застосовано для розв'язання повної проблеми власних значень поліноміального матричного пучка.

Отримано числові результати для задачі з теорії нелінійного структурного аналізу і проведено їх порівняння з оцінками, наведеними в [6].

Лінеаризація задачі. Розглянемо задачу

$$B(\lambda)y = 0 \tag{2}$$

обчислення власних значень та відповідних їм власних функцій пучка (1).

У просторі $\widetilde{E} = E \oplus E$ від задачі (2) перейдемо до відповідної їй лінійної задачі

$$\left(\lambda\widetilde{I} - \widetilde{B}\right)\widetilde{y} = \widetilde{0}, \tag{3}$$

де $\widetilde{I}$ – одиничний оператор у просторі $\widetilde{E}$; $\widetilde{y} = \left(y^{(1)}, y^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)} \in E$ – елементи простору $\widetilde{E}$; $\widetilde{0} = (0,0)^{\mathrm{T}}$; $\widetilde{B}$ – оператор, що діє в просторі $\widetilde{E}$ і має вигляд

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B_2 & -B_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Спираючись на дослідження, викладені в [1], можна стверджувати, що задачі (2) та (3) є спектрально еквівалентними. Тобто власні значення пучка $B(\lambda)$ й оператора $\widetilde{B}$ збігаються, а пара $\langle \lambda_i, y_i \rangle$ є власною парою пучка (1) тоді і тільки тоді, коли власною парою оператора (4) є $\langle \lambda_i, (y_i, \lambda_i y_i) \rangle^{\mathrm{T}}$.

Схожий спосіб лінеаризації було використано в [7].

© Ярошко Світлана, 2000

Застосування ММПН у випадку квадратичного операторного пучка. У [5, 3] запропоновано й обґрунтовано модифікований метод послідовних наближень для обчислення власних пар цілком неперервних операторів. Цей метод суттєво використовує те, що спектр власних значень таких операторів дискретний і є або скінченним, або має одну точку згущення в нулі. Доведемо, що таку ж властивість має спектр оператора $\widetilde{B}$.

Доведемо, що оператор $\widetilde{B}^2$ – цілком неперервний. Нехай $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$, тоді

$$\widetilde{B}^2\widetilde{x} \equiv \begin{pmatrix} -B_2 & -B_1 \\ B_1B_2 & -B_2+B_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \widetilde{y}\,. \tag{5}$$

Будь-яку нескінченну послідовність $\{\widetilde{x}_n\}$ можна записати у вигляді $\left(\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\}\right)^{\mathrm{T}}$. Оскільки оператор B_2 – цілком неперервний, з послідовності $\{x_n^{(1)}\}$ можна виділити підпослідовність $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ таку, що послідовність $\{B_2x_{n_k}^{(1)}\}$ – збіжна. Аналогічно, з $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ можна виділити $\{x_{n_{k_l}}^{(2)}\}$ таку, що $\{B_1x_{n_{k_l}}^{(2)}\}$ – збіжна.. Зауважимо, що послідовність $\{B_2x_{n_{k_l}}^{(1)}\}$ – збіжна як підпослідовність збіжної послідовності. Отже, з послідовності $\{\widetilde{x}_n\}$ ми виділили таку підпослідовність $\{\widetilde{x}_{n_{k_l}}\}$, що $\{y_{n_{k_l}}^{(1)}\}$ – збіжна. Для спрощення індексації послідовність $\{y_{n_{k_l}}^{(1)}\}$ позначимо $\{y_l^{(1)}\}$, а $\{\widetilde{x}_{n_{k_l}}\}$ – $\{\widetilde{x}_l\}$.

Згідно з відомими властивостями цілком неперервних операторів [8], B_1B_2 і $-B_2+B_1^2$ теж є цілком неперервними. Тому з послідовності $\{x_l^{(1)}\}$ можна виділити підпослідовність $\{x_{l_i}^{(1)}\}$ таку, що $\{B_1B_2x_{l_i}^{(1)}\}$ – збіжна, а з $\{x_{l_i}^{(2)}\}$ – підпослідовність $\{x_{l_{i_j}}^{(2)}\}$ таку, що $\{(-B_2+B_1^2)x_{l_{i_j}}^{(2)}\}$ – збіжна. Отже, послідовність $\{y_{l_{i_j}}^{(2)}\}$ – збіжна. Позначимо її $\{y_j^{(2)}\}$, а послідовність $\{x_{l_{i_j}}^{(2)}\}$ – $\{x_j^{(2)}\}$.

Остаточно маємо: з будь-якої послідовності $\{\widetilde{x}_n\}$ можна виділити підпослідовність $\{\widetilde{x}_j\}$ таку, що послідовність $\{\widetilde{y}_j\}=\{\widetilde{B}^2\widetilde{x}_j\}$ – збіжна. Отже, згідно з відомою теоремою [8], оператор $\widetilde{B}^2$ – цілком неперервний, що і треба було довести.

Множина $\{\lambda_n^2\}$ власних значень цілком неперервного оператора $\widetilde{B}^2$ є скінченною або зліченною і може мати точку згущення в нулі [8]. Очевидно, що таку саму властивість має і множина $\{\lambda_n\}$ власних значень оператора $\widetilde{B}$. Тому існує ціла функція

$$F(\mu)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j\mu^j\,, \tag{6}$$

коренями якої є характеристичні числа $\mu_n = 1/\lambda_n$ оператора $\widetilde{B}$. Як і в [5], власні функції оператора $\widetilde{B}$ шукаємо у вигляді

$$\widetilde{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{z}_m \mu^m , \tag{7}$$

де

$$\widetilde{z}_m = \sum_{j=0}^{m} c_j \widetilde{v}_{m-j} , \tag{8}$$

$$\widetilde{v}_j = \widetilde{B}\widetilde{v}_{j-1} = \widetilde{B}^j \widetilde{v}_0 , j = 1, 2, ... , \tag{9}$$

$\widetilde{v}_0 \in \widetilde{E}$ – деяка початкова функція, яку можна розкласти в ряд за власними функціями оператора $\widetilde{B}$.

Умови, яким повинні задовільняти невідомі коефіцієнти c_j, що входять у (8), встановлює наступна теорема.

Теорема: Якщо всі коефіцієнти b_n у розкладі

$$\widetilde{v}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \widetilde{u}_n \tag{10}$$

початкової функції $\widetilde{v}_0$ за власними функціями $\widetilde{u}_n$ відмінні від нуля, то для того, щоб ряд (6) абсолютно збігався у всій комплексній площині і перетворювався в нуль на характеристичних числах μ_n, необхідно і достатньо, щоб послідовність функцій

$$\widetilde{\psi}_m = \widetilde{z}_m / c_m \tag{11}$$

при $m \to \infty$ збігалась до нуля за нормою простору $\widetilde{E}$. При цьому на $\mu = \mu_n$ ряд (7) збігатиметься до $a_n \widetilde{u}_n$, де $a_n \neq 0$.

Ця теорема є аналогом основної теореми ММПН [5, 3] у просторі $\widetilde{E}$. Її доведення легко переноситься з простору E в $\widetilde{E}$.

Числові результати. У праці [6] описано приклад з теорії нелінійного структурного аналізу. Для диференціального рівняння

$$y''(x) + \left(\mu + \mu^2 p^2 x^2\right) y(x) = 0 \tag{12}$$

з граничними умовами $y(0) = y'(1) = 0$, де μ – спектральний параметр, p – фіксоване число, отримано такі оцінки для першого характеристичного числа задачі (12):

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\sqrt{1 + 3p^2(\pi^2 - 8)} + 1\right)^{-1} \le \mu_1(p) \le \frac{\pi^2}{2}\left(\sqrt{1 + 4p^2(\pi - 2)} + 1\right)^{-1}. \tag{13}$$

Від (12) перейдемо до інтегрального рівняння

$$\left(\lambda^2 I + \lambda B_1 + B_2\right) y = 0 , \tag{14}$$

де $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, $B_1 = \int_0^1 G(x,\xi) y(\xi) d\xi$, $B_2 = p^2 \int_0^1 \xi^2 G(x,\xi) y(\xi) d\xi$, $G(x,\xi)$ – функція Гріна:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -x, x \le \xi , \\ -\xi, x \ge \xi . \end{cases} \tag{15}$$

Описаним у цій праці методом узагальнена спектральна задача (14) була розв'язана для різних значень *p*. Обчислене перше власне значення $\lambda_1(p)$ зображене на рис. 1 суцільною лінією. Пунктиром на рис. 1 виділені оцінки, одержані для нього з формул (13). Видно, що значення $\lambda_1(p)$ узгоджується з цими оцінками.

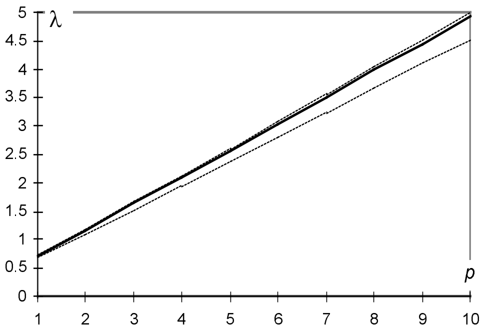

Рис. 1. Точне власне значення $\lambda_1(p)$ і його верхня та нижня оцінки

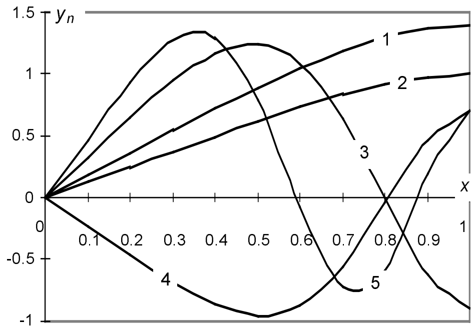

Рис. 2. Власні функції задачі (12) для випадку $p = 6$

Модифікований метод послідовних наближень дає змогу отримати не тільки перше власне значення, але і кілька наступних. Наприклад, при $p = 6$ було обчислено п'ять перших власних значень задачі (14): $\lambda_1 = 3.039312$, $\lambda_2 = -2.644122$, $\lambda_3 = 0.723$, $\lambda_4 = -0.678$, $\lambda_5 = 0.4$. Графіки відповідних їм власних функцій y_n зображені на рис. 2. Номер кривої відповідає номеру *n* функції.

---

1. *Подлевський Б. М.* Числові методи розв'язування узагальнених спектральних задач для поліноміальних пучків самоспряжених операторів. Автореферат дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. Львів: В-во Львів. ун-ту, 1995.
2. *Подлевський Б. М., Ярошко С. М., Ярошко С. А.* Розв'язання спектральної задачі для поліноміальних пучків матриць модифікованим методом послідовних наближень. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф-ка. 1999. Вип. 1. С. 191-195.
3. *Ярошко С. М., Ярошко С. А.* Модифікований ітераційний метод обчислення власних значень і власних функцій цілком неперервних операторів. В. кн.: Прямі та обернені задачі теорії електромагнітних та акустичних хвиль. Львів: В-во ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 1997. С. 109-112.
4. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.
5. *Войтович Н. Н., Ровенчак А. И.* Модификация метода последовательных приближений для однородных задач // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 348-357.
6. *Иванов Б. А.* О свойствах собственных значений положительных операторов, нелинейно зависящих от параметра // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1976. Вып. 56. С. 177-181.

7. *Кублановская В. Н.* К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений: Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1978. Т. 80. С. 83-97.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. А.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
9. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
10. *Podlevskiy B. M., Yaroshko S. M.* Modification of the Successive Approximation Method in Generalized Spectrum Problems for Quadratic Matrix Beams // Proc. of III-th International Seminar/Workshop Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. Lviv: IAPMM of NASU, 1998. P. 76-80.

CALCULATION OF EIGENVALUES OF QUADRATIC OPERATOR PENCIL USING THE MODIFICATED METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

Svitlana Yaroshko

Lviv Economic Business-College at Ivan Franko National University in Lviv
M. Mentsinskogo str., 8, 79000 Lviv, Ukraine

In this work the modificated metod of successive approximations [5, 10] application in the generalized spectrum problem of the quadratic pencil (1) of completely continuous operators is investigated.

Numerical results for the quadratic eigenvalue problem (12) from a nonlinear structural analysis are shown. They are compared with the first eigenvalue estimations, given in [6].

Key words: eigenvalue, operator pencil, completely continuous operator

Стаття надійшла до редколегії 09.12.1999
Прийнята до друку 15.09.2000